MEMBAWA MATRIKS KE DALAM BENTUK KANONIK JORDAN

Irmawati Liliana. KD
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Unswagati
irmawati.liliana@gmail.com

Abstrak

Bentuk kanonik Jordan terbentuk apabila terdapat suatu matriks A dengan nilai eigen λ dan **u. u** adalah vektor eigen dan vektor eigen tergeneralisir dari matriks A, maka akan didapat matriks transisi Q dimana entri-entri matriks transisi Q adalah vektor **u** sehingga didapat $Q^{-1}AQ = J$, dimana J adalah bentuk kanonik Jordan.

Suatu matriks persegi A dengan ordo nxn yang mempunyai **s** vektor eigen yang bebas linier, maka similar dengan matriks J yang berbentuk:

$$J = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & J_s \end{bmatrix}$$

J dinamakan bentuk kanonik Jordan dengan tiap J_i (i = 1, 2,….., s) dinamakan blok Jordan, dimana

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & & \ldots & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Dengan λ_i adalah nilai eigen tunggal dari matriks A dan mempunyai **s** vektor eigen yang bebas linier dari A. Matriks Q kolom-kolomnya merupakan vektor eigen dan vektor eigen tergeneralisir dari matriks A.

Kata kunci: Bentuk Kanonik Jordan, Nilai Eigen, Vektor Eigen, Vektor Eigen Tergeneralisir

A. PENDAHULUAN

Matriks merupakan salah satu bidang kajian dalam matematika, yang lebih dikhususkan dalam kajian aljabar linear. Matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks (Howard Anton,2002). Proses membentuk suatu matriks menjadi matriks diagonal kita ketahui sebagai proses diagonalisasi matriks yang memerlukan nilai eigen dan vektor eigen. Sebuah matriks yang *nonsingular* P dapat mendiagonalisasikan matriks A sedemikian sehingga $P^{-1}A\,P$ adalah matriks diagonal.

Suatu matriks dapat dibawa ke bentuk kanonik jika dapat didiagonalisasikan. Jika suatu matriks tidak dapat didiagonalisasikan maka harus dicari vektor-vektor eigen dari matriks tersebut. Ada berbagai macam bentuk kanonik diantaranya bentuk kanonik rasional, Jacobian, triangular dan Jordan. Pada kesempatan ini peneliti ingin memperdalam salah satu bentuk yaitu bentuk kanonik Jordan. Kanonik Jordan terjadi bila suatu matriks A dengan nilai eigen λ dan **u** adalah vektor eigen dan vektor eigen tergeneralisir dari matriks A maka akan didapatkan matriks transisi Q, dimana matriks transisi Q adalah vektor **u** sehingga didapat $Q^{-1}AQ = J$ dimana J adalah bentuk kanonik Jordan.

Dalam artikel ini dibahas bagaimana membawa matriks ke dalam bentuk kanonik Jordan menggunakan konsep-konsep aljabar linear. Oleh karena itu penting sekali dipelajari terlebih dahulu dasar-dasar aljabar linear seperti sistem persamaan linear, ruang vektor, matriks, dimensi dan basis.

B. KAJIAN PUSTAKA

Suatu matriks A dengan ordo nxn dikatakan dapat didiagonalisasi jika hanya jika A mempunyai vektor eigen yang bebas linier.

Bila $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\ell$ nilai eigen A dengan berturut-turut $m_{\lambda 1},m_{\lambda 2},\ldots,m_{\lambda \ell}$, dimana $m_{\lambda i}$ (i = 1,…, ℓ) adalah banyaknya nilai eigen λ_i dan dim (E_λ) adalah dimensi ruang eigen maka dim $(E_\lambda)_1$+ dim $(E_\lambda)_2$+…+ dim $(E_\lambda)_\ell = m_{\lambda 1}+m_{\lambda 2}+\ldots+m_{\lambda \ell} = n$

hal ini mengakibatkan A mempunyai cukup vektor eigen dengan nilai eigen λ. Maka didapat matriks Q sedemikian hingga $Q^{-1}AQ = D$ dimana D adalah matriks diagonal.

Matriks A dengan nilai eigen λ dengan $m_\lambda>1$, serta vektor eigen yang bebas linier yang berhubungan dengan λ kurang dari m_λ, maka $1\leq \dim(E_\lambda) < m_\lambda$, ini berarti bahwa A tidak mempunyai cukup vektor eigen dengan nilai eigen λ. Karena itu tidak mungkin untuk menemukan matriks Q sedemikian hingga $Q^{-1}AQ = D$ dimana D adalah matriks diagonal. Kolom matriks transisi Q merupakan vektor-vektor eigennya. Vektor-vektor ini dinamakan vektor eigen tergeneralisir.

1. Bentuk Kanonik Jordan

Jika A matriks persegi dengan ordo nxn yang mempunyai **s** vektor eigen yang bebas linier, maka similar dengan matriks J yang berbentuk

$$J = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & J_s \end{bmatrix}$$

J dinamakan bentuk kanonik Jordan dengan tiap J_i (i = 1,2,…,s) dinamakan blok Jordan yang berbentuk matriks segitiga

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

dimana λ_i adalah nilai eigen tunggal dari matriks A dan **s** adalah vektor eigen yang bebas linier dari A. Q adalah matriks yang kolom-kolomnya merupakan vektor eigen dan vektor eigen tergeneralisir dari matriks A. (Bill Jacob, 1990)

Bentuk kanonik Jordan adalah matriks diagonal dengan nilai eigen pada diagonal. Oleh karena itu matriks diagonal tersebut dinamakan bentuk kanonik Jordan.

2. Vektor Eigen Tergeneralisir

Teori basis dapat digunakan pada vektor eigen tergeneralisir untuk menghasilkan balikan matriks transisi Q sehingga transformasi ini menyebabkan matriks A menjadi bentuk kanonik jordan.

Vektor eigen **u** merupakan penyelesaian dari persamaan matriks A**u** = λ**u** ⇔ $(A-\lambda I)\mathbf{u}=0$. Sedangkan vektor eigen tergeneralisir $\mathbf{u}_r$ merupakan penyelesaian dari persamaan matriks $A\mathbf{u}_r = \lambda_r \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_{r-1}$.

$\mathbf{u}_r$ adalah vektor eigen tergeneralisir dari vektor eigen $\mathbf{u}_{r-1}$. Persamaan ini dapat ditulis menjadi $(A-\lambda_r I)\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{r-1}$. Dimana r adalah rank dari matriks A. Jika $\mathbf{u}_1$ adalah vektor eigen, $\mathbf{u}_2$ adalah vektor eigen tergeneralisir dari vektor eigen $\mathbf{u}_1$, dan seterusnya.

Contoh 1

Cari bentuk kanonik jordan dari matriks $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab:

Karena matriks A merupakan matriks segitiga atas sesuai dengan teorema maka nilai eigen yang di dapat $\lambda_1=\lambda_2=2$ dan $\lambda_3=3$

- Untuk $\lambda_1=\lambda_2=2$ maka

  $$[A-2I]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_{32(1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  rank =2 dan dim $(E_\lambda)_1$ adalah 1.

  Vektor eigen yang berhubungan dengan λ=2 adalah

$$\left[A-2I\right]\mathbf{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

persamaannya menjadi $x_2 + x_3 = 0$

$- x_3 = 0$

misal $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ dan $x_1 = t$ maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=2$ adalah vektor tak nol yang berbentuk $X = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

jadi $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Untuk mencari vektor eigen tergeneralisir dengan rank 2 dan $\lambda=2$ digunakan persamaan :

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{r-1}$$

$$\Leftrightarrow (A-2I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka didapat $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, dan $x_1 = t$

maka vektor eigen tergeneralisir yang bersesuaian dengan $\lambda=2$ adalah vektor tak nol yang berbentuk $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

jadi vektor eigen tergeneralisirnya adalah $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Untuk $\lambda_3=3$,maka

$$\left[A-3I\right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} H_{12(1)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[A-3I\right]\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

persamaannya menjadi $-x_1 \quad + 3x_3 = 0$

$- x_2 - \quad x_3 = 0$

terdapat satu variabel bebas, misal x_3

$x_3 = 1$, $x_2 = -1$ dan $x_1 = 3$

maka vektor eigen yang bersesuaian dengan λ =3 adalah $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Didapat himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ sehingga } Q^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} j_1 & 0 \\ 0 & j_2 \end{bmatrix}$$

dimana $j_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan $j_2 = [3]$.

<u>Contoh 2</u>

Cari Q sehingga $Q^{-1}AQ$ = J. J adalah bentuk kanonik jordan dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

Persamaan eigen A adalah $|A-\lambda I| = \lambda^4 - 11\lambda^3 + 42\lambda^2 - 68\lambda + 40 = (\lambda-2)^3(\lambda-5) = 0$

Maka nilai-nilai eigen yang didapat $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$, dan $\lambda_4=5$

- Untuk $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$, maka

$$[A-2I] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} H_{32(-1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

rank = 3 dan dim (E_λ) adalah 1

Vektor eigen yang berhubungan dengan $\lambda=2$ adalah

$$[A-2I]\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

persamaanya menjadi $-x_2 + 2x_3 = 0$

$x_2 - x_3 = 0$

$x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0$

terdapat 2 variabel bebas x_2 dan x_3

misal $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ dan $x_1=t$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk mencari vektor-vektor eigen tergeneralisir dengan rank 3 dan λ =2 digunakan persamaan :

$$(A-\lambda_i I)\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{r-1}$$

- $[A-2I]\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

persamaanya menjadi $-x_2 + 2x_3 = 1$

$$x_2 - x_3 = 0$$
$$x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0$$

terdapat 2 variabel bebas x_2 dan x_3

misal x_2=1, x_3=1, maka $x_4 = \frac{2}{3}$ dan x_1=t

$$x = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Jadi $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

- $\lfloor A-2I \rfloor \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

persamaanya menjadi $-x_2 + 2x_3 = 0$

$$x_2 - x_3 = 1$$
$$x_2 - 3x_3 + 3x_4 = \frac{2}{3}$$

didapat x_3=1, x_2=2, $x_4 = \frac{5}{9}$ dan x_1=s

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} s \\ 2 \\ 1 \\ \frac{5}{9} \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ \frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

Jadi $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ \frac{5}{9} \end{bmatrix}$

- Untuk λ_4=5, maka

  $\lfloor A-5I \rfloor \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

persamaanya menjadi $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

$-2x_2 - x_3 = 0$

$- x_2 - 4x_3 = 0$

$x_2 - 3x_3 = 0$

terdapat 2 variabel bebas x_2 dan x_3

misal $x_2=0$, $x_3=0$, $x_1=0$ dan $x_4=s$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Didapat himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{sehingga} \quad Q^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{7}{9} & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{7}{9} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} j_1 & 0 \\ 0 & j_2 \end{bmatrix}$$

dimana $j_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan $j_2 = [5]$.

Apabila A suatu matriks persegi yang mempunyai vektor eigen yang bebas linier dan J bentuk kanonik jordan maka sesuai definisi akan diperoleh bentuk:

$$Q^{-1}AQ = J = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_s \end{bmatrix}$$

dimana entri-entri dari Q adalah vektor eigen dan vektor eigen tergeneralisir dari matriks A dan J_i (i=1,2,..,s) adalah blok Jordan.

C. KESIMPULAN DAN SARAN

Suatu matriks persegi A dengan ordo nxn dan mempunyai vektor eigen yang bebas linier, maka vektor eigen tersebut similar dengan matriks J yang berbentuk

$$J = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & J_s \end{bmatrix}$$

Dimana J dinamakan bentuk kanonik jordan dengan tiap J_i (i=1,2,…,s) dinamakan blok jordan

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

λ_i adalah nilai eigen tunggal dari matriks A, matriks Q kolom-kolomnya merupakan vektor eigen dan vektor eigen tergeneralisir dari matriks A.

Vektor eigen **u** merupakan penyelesaian dari persamaan matriks A**u** = λ**u** ⇔ $(A-\lambda I)\mathbf{u}=0$. Sedangkan vektor karakteristik tergeneralisir $\mathbf{u}_r$ merupakan penyelesaian dari persamaan matriks $A\mathbf{u}_r = \lambda_r \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_{r-1}$. $\mathbf{u}_r$ adalah vektor karakteristik tergeneralisir dari vektor karakteristik $\mathbf{u}_{r-1}$. Persamaan ini dapat ditulis menjadi $(A-\lambda_r I)\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{r-1}$, dimana r adalah rank dari matriks A.

Penulis sangat berharap artikel ini dapat digunakan sebagai bahan pertimbangan atau pedoman penelitian lebih lanjut, misalnya penelitian tentang bentuk kanonik jordan bila diaplikasikan dalam bidang lain atau dalam kehidupan sehari-hari.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 2002. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Ayres, F. 1994. *Matriks*. Jakarta: Erlangga.

Finkbeiner, D.T. 1978. *Introduction To Matrices And Linear Transformation*. San Francisco: W.H. Freeman and Company.

Hadley, G. 1992. *Aljabar linier*. Jakarta: Erlangga.

H.S, Suryadi. 1991. *Pengantar Aljabar Linear dan Geometri Analitik*. Jakarta: Gunadarma.

Jacob, B. 1990. *Linear Algebra*. New York: W.H. Freeman and Company.

Setiadji. 2007. *Aljabar Linear*. Jogjakarta: Graha Ilmu.

Tabrizian, P. 2013. How to Find the Jordan Canonical Form of Matrix. http://math.berkeley.edu. Diakses 26 September 2015.