

ANALISIS STABILITAS SISTEM DINAMIK UNTUK MODEL PERTUMBUHAN DUA MIKROORGANISME DI MEDIUM KEMOSTAT

Oleh :

Herri Sulaiman S.Si, M.Sc

Dosen Matematika FKIP - UNSWAGATI

ABSTRAK

Ruang pertumbuhan dalam medium kemostat memungkinkan terjadinya interaksi antara dua mikroorganisme yang dapat dimodelkan secara matematis. Telah diketahui pada penelitian sebelumnya bahwa analisis kestabilan lokal pada sistem model pertumbuhan mikroorganisme di medium kemostat stabil asimtotik lokal. Dalam menentukan kestabilan lokal tersebut dapat digunakan matriks jacobian dengan syarat titik ekuilibrium yang telah ditemukan adalah hiperbolik. Dalam penelitian ini akan dianalisis kestabilan global dari model pertumbuhan mikroorganisme di medium kemostat dengan melihat pertimbangan-pertimbangan dari titik ekuilibrium yang telah didapat berdasarkan penelitian sebelumnya. Lebih lanjut dalam menganalisis kestabilan global digunakan teorema-teorema dari fungsi penarik global yang berdasarkan pada fungsi Liapunov dan teorema LaSalle serta seragam persistensi. Lebih lanjut diberikan simulasi numerik dan potret fase dari sistem model kemostat yang telah dibentuk agar dapat diketahui perilaku dari solusi sistem kemostat dalam keadaan yang sebenarnya.

Kata kunci : kemostat, mikroorganisme, kestabilan global.

I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Model pertumbuhan untuk dua mikroorganisme di medium kemostat.

Kemostat yang berbentuk tabung (tank) terdiri dari media penyimpanan yang digunakan sebagai tempat cadangan nutrisi, kemudian dihubungkan dengan sebuah pipa dan mengalir masuk ke dalam medium lain yang digunakan sebagai tempat untuk pertumbuhan dan perkembangan mikroorganisme dan dikenal dengan istilah medium kultur. Ke dalam medium kultur dimasukkan dua mikroorganisme yang saling berkompetisi (bersaing) untuk mendapatkan (mengkonsumsi) makanan dengan satu nutrisi yang sejenis. Volume tabung dijaga agar tetap stabil dengan cara menambah nutrisi yang berasal dari medium penyimpanan

kemudian mengeluarkan limbah nutrisi dan mikroorganisme. Berikut ini diberikan diagram transfer dari sistem model kemostat untuk dua mikroorganismenya.



Berdasarkan diagram transfer yang telah dibentuk, didapat model pertumbuhan untuk dua mikroorganismenya di medium kemostat sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \mu_1 c(t) - \frac{1}{D} c(t) \\ \dot{p}(t) &= \mu_1 p(t) - \frac{1}{D} p(t) \\ \dot{q}(t) &= \mu_2 q(t) - \frac{1}{D} q(t) \end{aligned}$$

dan diberikan nilai awal sebagai berikut,

$$c(0) = c_0 > 0, \quad p(0) = p_0 > 0, \quad \text{dan} \quad q(0) = q_0 > 0.$$

Variabel-variabel dimensional seperti pengenceran dengan satuan (liter/jam), volume medium kultur dan penyimpanan dengan satuan (liter), konsentrasi nutrisi pada medium kultur dan media penyimpanan dengan satuan (gr/liter), konsentrasi dari kedua mikroorganismenya dengan satuan (gr/liter) dapat diabaikan terlebih dahulu. Lebih lanjut Sistem model di atas akan ditransformasi menjadi Sistem model yang baru yang lebih sederhana dengan tujuan agar lebih mudah mencari solusi eksaknya. Variabel non dimensional yang dapat diu... yaitu konsentrasi nutrisi dalam satuan c_0 , D_1 dalam satuan $\frac{1}{D}$, D_2 dalam satuan $\frac{1}{D}$ dalam satuan $\frac{1}{D}$, konsentrasi mikroorganismenya pertama dalam satuan $\eta_1 c_0$ dan konsentrasi mikroorganismenya ke dua dalam satuan $\eta_2 c_0$, sehingga variabel-variabel di atas dapat

dinyatakan dengan $\frac{dN_1}{dt} = \mu_1 N_1 - \delta_1 N_1 - \beta_1 N_1 N_2$, $\frac{dN_2}{dt} = \mu_2 N_2 - \delta_2 N_2 - \beta_2 N_1 N_2$ dan $\bar{t} = \frac{t}{D}$. Jadi, diperoleh model matematika baru untuk sistem kemostat dua mikroorganisme yaitu :

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = \mu_1 N_1 - \delta_1 N_1 - \beta_1 N_1 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = \mu_2 N_2 - \delta_2 N_2 - \beta_2 N_1 N_2 \end{cases} \quad (1)$$

dan diberikan nilai awal

$$N_1(0) = N_{10} > 0, \quad N_2(0) = N_{20} > 0, \quad \text{dan} \quad q(0) = q_0 > 0.$$

Lebih lanjut diasumsikan fungsi respon $c(t)$ untuk $i = 1, 2$ sebagai berikut :

- i. $R_+ \rightarrow R_+$,
- ii. diferensiabel kontinu,
- iii. $c(0) = 0$,
- iv. $c(t)$ naik monoton pada R_+ .

(Herri Sulaiman, 2015- Jurnal Euclid Unswagati)

Berikut ini akan dibahas mengenai keterbatasan solusi positif untuk Sistem Persamaan (1).

Teorema 1

Dimisalkan $c(t) = c(t), q(t)$ dari Sistem (1),

- i. Untuk $t \geq 0$ maka berlaku $c(t), p(t)$ dan $q(t) > 0$,
- ii. $0 < \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \leq 1$.

Bukti:

i. Akan pernyataan $\forall t \geq 0$ maka $c(t), p(t)$ dan $q(t) > 0$ tidaklah benar. Berarti ada t_0 dengan $c(t) \leq 0$, atau $p(t) \leq 0$, atau $q(t) \leq 0$.

a). Andaikan ada $t \geq 0$ dengan $c(t) \leq 0$. Dirisalkan $t^* = \min\{t : t > 0 \text{ dan } c(t) = 0\}$, maka $c(t) > 0, \forall t \in [0, t^*)$. Pertama di sistem (1) dipunyai, $\dot{c}(t^*) = 1 - c(t^*) - \dots$

Karena $c(t^*) = 0$ dan menurut asumsi (iii) yaitu $c'(t^*) = 1 > 0$. Jadi $\dot{c}(t) > 0$ pada suatu persekitaran t^* , atau $c(t)$ monoton naik pada selang $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$ untuk suatu $\varepsilon > 0$. Karena $c(t)$ monoton naik berarti ada $c(t)$ yang positif pada interval $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$, sedangkan pernyataan di atas mengatakan bahwa ada $t \geq 0$ dengan $c(t) \leq 0$ yang berarti $c(t)$ tidak naik pada selang $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$. Dalam hal ini kontradiksi, jadi benar bahwa $c(t) > 0$ untuk semua $t \geq 0$.

b). Andaikan ada $t \geq 0$ dan $p(t) \leq 0$. Dikatakan $t_1 = \inf\{t : t > 0 \text{ dan } p(t_1)q(t_1) = 0\}$. Lebih lanjut diasumsikan untuk $p(t) = 0$ dan $q(t) > 0$ pada interval $t \in [0, t_1]$. Kemudian dikanalalkan :

$M = \frac{1}{t_1} [k(t) - D]$ maka untuk $t \in [0, t_1]$ persamaan ke dua di sistem (1) akan menjadi $\dot{p}(t) \geq Mp(t)$ dan untuk $\dot{p}(t) \geq Mp(t)$ diperoleh

$$\frac{dp(t)}{dt} \geq Mp(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp(t)}{p(t)} \geq Mdt,$$

kemudian masing-masing diintegralkan didapat

$$\int \frac{dp(t)}{p(t)} \geq \int Mdt$$

$$\Leftrightarrow \ln|p(t)| \geq Mt + c$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln p(t)} \geq e^{Mt+c}$$

$$\Leftrightarrow p(t) \geq e^{Mt+c} > 0.$$

Lebih lanjut untuk $t = 0$ maka $p(0) = e^c$ sehingga diperoleh $p(t) \geq p(0)e^{Mt}$ untuk $t = t_1$ maka diperoleh $p(t_1) \geq p(0)e^{Mt_1}$ dengan $e^{Mt_1} > 0$. Untuk $\dot{p}(t) \geq Mp(t)$ berarti didapat $p(t) \geq p(0)e^{Mt} > 0$. Dengan demikian $p(t)$ positif berarti $p(t)$ naik pada interval $[0, t_1]$, sedangkan pernyataan di atas mengatakan bahwa ada $t \geq 0$ dengan $p(t) \leq 0$ yang berarti $p(t)$ tidak naik pada interval $[0, t_1]$. Dalam hal ini kontradiksi, oleh karena itu benar bahwa $p(t) > 0$ untuk semua $t \geq 0$.

c). (Pembuktian analog untuk $q(t) > 0$).

ii. (ii). Dari Persamaan pertama dalam sistem (1). Untuk $p(t) > 0$ dan $c(t) > 0$, maka Persamaan pertama dari Sistem (1) menjadi $\dot{c}(t) \leq 1 - c(t)$ untuk setiap $t \geq 0$. Untuk $\dot{c}(t) \leq 1 - c(t)$ diperoleh

$$\frac{d}{dt} \leq 1 - c(t),$$

$$\Leftrightarrow \frac{dc(t)}{-c(t)} \leq dt.$$

Lebih lanjut dengan mengintegrasikan ruas kiri dan kanan diperoleh

$$\int \frac{-(-1) \cdot c}{1-c} = \int dt$$

$$\Leftrightarrow - \frac{tc(t)}{c(t)} \leq \int dt$$

$$\Leftrightarrow -c \cdot t \leq t + c,$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-c(t)} \leq e^{t e^c},$$

$$\Leftrightarrow (1 - c^{(+)}) \leq e^{t e^c},$$

$$\Leftrightarrow - \frac{1}{c} \leq e^{t e^c} - 1,$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq t e^{-c}.$$

Lebih lanjut untuk $t \rightarrow \infty$ diperoleh $c(t) = 1 - e^{-c}$ atau ekuivalen dengan $e^{-c} = 1 -$

oleh karena

$$(1 - e^{-c} - e^{-t} \dots)$$

$$\Leftrightarrow 1 + (c(0) - 1)e^{-t},$$

$$\Leftrightarrow c(t) \leq 1 + \frac{(c(0)-1)}{e^t}$$

Jadi diperoleh $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \leq 1$. ■

Teorema 2

Dimisalkan $D_{\max} = \max\{1, D_1, D_2\}$ dan $D_{\min} = \min\{1, D_1, D_2\}$. Untuk suatu $\varepsilon > 0$, solusi $c(t), p(t)$ dan $q(t)$ dari sistem (1) memenuhi :

$$\frac{1}{D_{\max}} - \varepsilon \leq c(t) + p(t) + q(t) \leq \frac{1}{D_{\min}} + \varepsilon.$$

Bukti :

Dijumlahkan tiga Persamaan dalam Sistem (1) didapat :

$$(c + p + q)' = 1 - (c + D_1 p + D_2 q)$$

Menurut definisi D_{\max} dan D_{\min} maka didapat :

$$1 - D_{\max} (c + p + q) \leq (c + p + q) - D_{\min} (c + p + q).$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} & 1 - D_{\max} (c + p + q) \leq (c + p + q)' \\ \Rightarrow & \frac{(c + p + q)'}{D_{\max}} \geq \frac{(c + p + q)'}{D_{\min}}. \end{aligned}$$

Lebih lanjut diperoleh :

$$\begin{aligned} & \frac{(c + p + q)'}{D_{\max}} \leq \frac{1}{D_{\min}} - (c + p + q) \\ \Rightarrow & (c + p + q) \leq \frac{1}{D_{\min}} - \frac{(c + p + q)'}{D_{\max}} \end{aligned}$$

Oleh karena itu

$$\frac{(c + p + q)'}{D_{\min}} \geq \frac{(c + p + q)'}{D_{\max}}.$$

Dimisalkan

$$\frac{(c + p + q)'}{D_{\max}} \leq \varepsilon \leq \frac{(c + p + q)'}{D_{\min}}$$

dengan,

$$\frac{1}{D_{\max}} - \varepsilon \leq \frac{1}{D_{\max}} - \frac{(c + p + q)'}{D_{\max}}$$

dan

$$\frac{1}{D_{\min}} - \frac{(c + p + q)'}{D_{\min}} \leq \frac{1}{D_{\min}} + \varepsilon.$$

Jadi diperoleh :

$$\frac{1}{D_{\max}} - \varepsilon \leq (c + p + q) \leq \frac{1}{D_{\min}} + \varepsilon.$$

Berikut ini, diberikan teorema mengenai titik ekuilibrium dari model Sistem (1)

Teorema 3

- i. Sistem (1) mempunyai Titik Ekuilibrium $E_1(1,0,0)$.
- ii. Jika $\frac{1}{D_1} > \frac{1}{D_2}$, maka Sistem (1) mempunyai Titik Ekuilibrium $E_2(\frac{1}{D_1}, 0, 0)$ dan $E_3(0, \frac{1-\varepsilon}{D_2}, 0)$ dengan ε memenuhi $(\frac{1-\varepsilon}{D_2})' = D_2$.
- iii. Jika $\frac{1}{D_1} > \frac{1}{D_2}$, maka Sistem (1) mempunyai Titik Ekuilibrium $E_3(\bar{c}, \frac{1-\varepsilon}{D_2}, 0)$ dengan \bar{c} memenuhi $(\bar{c})' = D_2$.

Lebih lanjut, diberikan teorema mengenai kestabilan titik ekuilibrium dari model Sistem (1).

Teorema 4

Jika $\mu_1 < D_1$ untuk μ_1, μ_2 maka Titik Ekuilibrium $E_1 (1,0,0)$ stabil asimtotik lokal.

Teorema 5

Jika $\mu_2 < D_2$ maka Titik Ekuilibrium $E_2 (0,1,0)$ stabil asimtotik lokal.

Teorema 6

Jika $\mu_3 < D_3$ maka Titik Ekuilibrium $E_3 (\bar{c}, \frac{1-\bar{c}}{D_2}, 0)$ stabil asimtotik lokal.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang masalah di atas, dikemukakan rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana kestabilan global titik ekuilibrium dari model kemostat untuk dua mikroorganisme?
2. Bagaimana interpretasi kestabilan global dari salah satu titik ekuilibriumnya ?
3. Bagaimana grafik simulasi numerik dan potret fase dari kestabilan global titik ekuilibrium pada model kemostat untuk dua mikroorganisme?

C. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk :

1. Menganalisis dan menemukan kestabilan global dari titik-titik ekuilibrium model kemostat untuk dua mikroorganisme.
2. Menginterpretasikan kestabilan global dari masing-masing titik ekuilibrium pada model kemostat.
3. Membuat grafik simulasi numerik dan potret fase dari kestabilan global titik ekuilibrium pada model kemostat untuk dua mikroorganisme.

D. Manfaat Penelitian

Dengan mengacu pada tujuan penelitian di atas, maka manfaat penelitian meliputi hal-hal berikut ini :

1. Penelitian ini dapat menjadi salah satu acuan dalam menyikapi keadaan lingkungan yang saat ini tercemar oleh zat-zat yang berbahaya khususnya di daerah lingkungan pertambangan.
2. Selain itu, penelitian ini juga dapat menjadi salah satu acuan dalam melihat pemodelan matematika untuk kasus- kasus yang serupa.

E. Tinjauan Pustaka

Penelitian ini mengkaji dan mengembangkan kembali jurnal yang ditulis oleh Herri Sulaiman yang berjudul: *Analisis Kestabilan Lokal Dalam Pertumbuhan Mikroorganisme di Medium Kemostat*, Jurnal Euclid. Vol.2 Edisi Januari 2015 yang menjelaskan mengenai analisa kestabilan lokal dari model kemostat untuk satu dan dua mikroorganisme.

F. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan cara menganalisis, mempelajari dan mengembangkan kembali Jurnal yang ditulis oleh Herri Sulaiman (2015), yang membahas tentang analisa kestabilan lokal dari Sistem model kemostat untuk satu dan dua mikroorganisme. Kestabilan lokal didapat dengan menyelidiki terlebih dahulu titik-titik ekuilibrium dari Sistem model kemostat yang telah dibentuk.

Penentuan titik ekuilibrium digunakan untuk menentukan kondisi steady state dari konsentrasi nutrien dan mikroorganisme agar dalam keadaan setimbang. Kestabilan dari titik ekuilibrium digunakan untuk melihat tingkah laku dari solusi-solusi di sekitar titik ekuilibrium dalam kaitannya dengan keadaan nutrien dan mikroorganisme untuk waktu yang cukup lama.

Selanjutnya, untuk menentukan kestabilan global digunakan fungsi penarik global (*Global Attraction Function*) yang berdasarkan toerema Liapunov-LaSalle dan Keseragaman Persistensi (*Uniformly Persistence*) dengan melihat sistem model kemostat untuk dua mikroorgansime. Langkah terakhir adalah melakukan simulasi numerik dari model yang bertujuan untuk mengilustrasikan perilaku

mikroorganisme dan nutrisi pada model yang telah dibentuk dengan menggunakan parameter-parameter yang telah disesuaikan dengan teorema yang terkait. Simulasi numerik dibuat dengan menggunakan program MATLAB versi R.2011.A.

II. LANDASAN TEORI

Kestabilan dapat ditentukan dengan melihat jenis potret fasenya. Teorema berikut ini digunakan untuk menentukan kestabilan titik-titik ekuilibrium dari sistem

Teorema 2.1 (Perko, 1991)

Diberikan sistem berbentuk $\dot{x} = Ax$ dan λ adalah nilai eigen dari matriks A yang matriks berukuran 2×2 dan titik ekuilibrium $x = 0$.

1. Jika λ real berbeda dan bertanda maka titik ekuilibrium adalah node. Tidak stabil jika keduanya positif dan merupakan atraktor negatif sedangkan λ keduanya negatif maka titik ekuilibrium adalah stabil dan atraktor positif.
2. Jika λ real, berbeda nilai dan berbeda tanda maka titik ekuilibrium dikatakan sadel. Perilaku orbit adalah hiperbolik. Titik ekuilibrium bukan atraktor.
3. Jika λ dan μ kompleks konjugat dengan bagian real tak nol, maka titik ekuilibrium adalah fokus/spiral. Misalkan nilai eigen $\lambda_{1,2} = \mu \pm wi$, jika $\mu < 0$, $w \neq 0$ titik ekuilibrium tidak stabil dan merupakan atraktor negatif, sedangkan jika $\mu > 0$, $w \neq 0$ titik ekuilibrium stabil dan merupakan atraktor positif.
4. Jika λ imajiner murni maka titik ekuilibrium adalah center.

Tanda dari nilai eigen suatu matriks dapat juga ditentukan oleh tanda determinan dan trace matriks tersebut. Untuk itu teorema berikut dapat juga digunakan untuk menentukan kestabilan sistem berbentuk

Teorema 2.2 (Perron, 1991)

Perikan A dengan λ matriks berukuran 2×2 , $\delta = \det(A - \lambda I)$ trace A dan λ adalah satu-satunya titik ekuilibrium

1. Jika $\delta < 0$ maka sistem berbentuk λ dikatakan saddle pada titik asal.
2. Jika $\delta > 0$ dan $\text{trace}(A) < 0$ maka sistem berbentuk λ dikatakan node pada titik asal. Stabil jika $\text{trace}(A) < 0$ dan tidak stabil jika $\text{trace}(A) > 0$.
3. Jika $\delta > 0$ dan $\text{trace}(A) > 0$, dan $\text{trace}(A)^2 - 4\delta < 0$, dan $\text{trace}(A) < 0$ maka sistem berbentuk λ dikatakan fokus pada titik asal. Stabil jika $\text{trace}(A) < 0$ dan tidak stabil jika $\text{trace}(A) > 0$.
4. Jika $\delta > 0$ dan $\text{trace}(A) = 0$ maka sistem berbentuk λ dikatakan center pada titik asal.

Bukti :

Nilai eigen dari matriks A dapat dicari dengan cara:

$$\lambda = \frac{\text{trace}(A) \pm \sqrt{\text{trace}(A)^2 - 4\delta}}{2}$$

1. Jika $\delta < 0$ maka terdapat dua nilai eigen yang berlawanan tanda, sehingga menurut teorema 2.2 sistem berbentuk λ dikatakan saddle pada titik asal.
2. Jika $\delta > 0$ dan $\text{trace}(A) < 0$ maka terdapat dua nilai eigen yang bertanda sama, sehingga menurut teorema 2.2 sistem berbentuk λ dikatakan node pada titik asal.
3. Jika $\delta > 0$ dan $\text{trace}(A) > 0$, dan $\text{trace}(A)^2 - 4\delta < 0$ dan $\text{trace}(A) < 0$ maka terdapat dua nilai kompleks konjugat, sehingga menurut teorema 2.2 sistem berbentuk λ dikatakan fokus pada titik asal.
4. Jika $\delta > 0$ dan $\text{trace}(A) = 0$ maka nilai-nilai eigen matriks A imajiner murni sehingga menurut teorema 2.2 sistem berbentuk λ dikatakan center.

2.1 Fungsi Liapunov

Pendekatan yang dapat diambil untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan baik hiperbolik (yaitu titik ekuilibrium yang matriks Jacobiannya mempunyai nilai eigen dengan bagian realnya tidak sama dengan nol) maupun tak hiperbolik adalah dengan mencari fungsi Liapunov. Fungsi Liapunov

mempunyai kurva tertutup yang mengelilingi titik kesetimbangan sehingga dari sebarang titik di kurva tersebut akan diperhatikan suatu lintasan di sekitar titik kesetimbangan. Teori kestabilan Liapunov diantaranya dijelaskan oleh Liapunov (1892) serta LaSalle dan Lefshetz (1961). Sebelum mengetahui definisi dari fungsi Liapunov diberikan definisi-definisi yang berkaitan terlebih dahulu pada suatu Sistem.

$$(2)$$

dengan redefinisi dan memenuhi kondisi tertentu terhadap beberapa titik pada himpunan :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

dengan adalah konstanta positif konstan. Diasumsikan $r > 0$ penyelesaian dari sistem, sehingga $\dot{V} = 0$ untuk setiap (x, y) selanjutnya dapat digunakan Liapunov dapat digunakan untuk mempelajari penyelesaian $(x, y) = 0$ dari (2). Bentuk fungsi bernilai real :

$$V(x, y) =$$

yang mendefinisikan :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x^2 + y^2 < r^2\}$$

dianggap $0 < r < \infty$ dan diasumsikan :

1. V memiliki turunan parsial pertama yang kontinu terhadap (x, y) setiap titik di D
2. $V(x, y) = 0$ untuk $(x, y) = (0, 0)$

Definisi 2

Fungsi bernilai positif (negatif) pada D jika $\forall (x, y) \in D, V(x, y) > 0$ atau $V(x, y) < 0$. Fungsi bernilai positif (negatif) memenuhi kriteria yang sama sebagaimana di atas. Fungsi bernilai positif (negatif) dapat didefinisikan sebagai fungsi bernilai positif (negatif) pada D jika $\forall (x, y) \in D, V(x, y) > 0$ atau $V(x, y) < 0$. Fungsi bernilai positif (negatif) pada D yang definit positif, sehingga $\forall (x, y) \in D, V(x, y) > 0$ atau $V(x, y) < 0$.

fungsi $f(x)$ terbatas jika ada konstanta $M > 0$ sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk semua x dalam domain D .
 Fungsi $f(x)$ mempunyai batas atas yang kecil sekali (infinitesimal upper bound) jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \epsilon$ untuk semua x dalam D dengan $|x - a| < \delta$.
 Jika $L = 0$, maka $f(x)$ dikatakan mempunyai batas atas yang kecil sekali (infinitesimal upper bound) pada a jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| < \epsilon$ untuk semua x dalam D dengan $|x - a| < \delta$.

Teorema 2.4

Teorema stabil asimtotis: jika ada fungsi $f(x)$ yang definit positif pada (a, ∞) dan $f(x) \rightarrow \infty$ sebagai $x \rightarrow \infty$, serta $f(x)$ mempunyai batas atas yang kecil sekali (infinitesimal upper bound) serta $f(x)$ definit negatif pada $(-\infty, a)$ maka 0 penyelesaian yang stabil asimtotis untuk persamaan (2).

Teorema 2.5

Teorema tak stabil: jika ada fungsi $f(x)$ dengan domain D yang memenuhi hipotesa berikut:

1. $f(x)$ mempunyai batas atas yang kecil sekali (infinitesimal upper bound)
2. $f(x) \rightarrow \infty$ sebagai $x \rightarrow \infty$
3. Terdapat $\epsilon > 0$ sehingga $f(x) > \epsilon$ untuk semua x dalam D dengan $|x - a| < \delta$ dan $\delta > 0$ maka 0 tak stabil.

Teorema 2.6

Teorema stabil asimtotis global : jika ada fungsi $f(x)$ dengan domain D yang memenuhi hipotesis berikut ini :

1. $f(x)$ mempunyai batas atas yang kecil sekali (infinitesimal upper bound) pada (a, ∞) dan $f(x) \rightarrow \infty$ sebagai $x \rightarrow \infty$ dengan konstanta positif.
2. $f(x)$ definit negatif pada $(-\infty, a)$
3. $f(x)$ positif terhadap x mana terdapat x_0 sehingga $f(x_0) = 0$, $f(x) > 0$ jika $x > x_0$ dan $\forall x > x_0$ berlaku $f(x) > 0$.
4. $f(x) \rightarrow \infty$ sebagai $x \rightarrow \infty$. Sehingga 0 penyelesaian yang stabil asimtotis global untuk persamaan (2).

Pada dasarnya, suatu sistem dikatakan stabil jika trayektori penyelesaian di sekitar titik setimbang mendekati titik tersebut. Stabilitas Sistem dapat dianalisa

secara lokal dan global. Stabilitas lokal adalah perilaku lokal dari trayektori di sekitar titik setimbang dimana setiap trayektori mendekati titik tersebut, dan untuk mencarinya diselidiki terlebih dahulu keterbatasan penyelesaian Sistem. Sedangkan untuk stabilitas global, salah satunya dapat dianalisa dengan menggunakan teorema La-Salle yang berkorelasi dengan Liapunov. Hubungan antara fungsi Liapunov dan kestabilan digambarkan pada definisi dan Teorema Liapunov-Lasalle berikut ini :

Definisi 2.7

Mi

$$\dot{x} = f(x) \quad (3)$$

adalah Sistem persamaan diferens berdimensi n. fungsi $V(x)$ terdefinisi di D dan terbuka di D , dan S adalah himpunan bagian dari D . Fungsi $V(x)$ dikatakan fungsi Liapunov untuk pe (3) di D jika :

1. $V(x) > 0$ dapat turunkan disetiap titik $x \in D$
2. $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) < 0$ di D

Teorema 2.8

Jika $V(x)$ adalah Liapunov dari persamaan (3) pada daerah D yang $\{0, \dots, 1\}$ dan S adalah himpunan invarian terbesar di D . Maka setiap trayektor terbatas $x(t)$ dari persamaan (2.21) yang ada di D mendekati himpunan S untuk $t \rightarrow \infty$.

2.2 Persistensi

Ambil D sebagai ruang metrik yang berak dengan metrik dan D tertutup dari D dan batas D dapat pula fungsi $V(x)$ terdefinisi pada D dan invarian di bawah (3). Maka $V(x)$ kontinu sehingga $V(x)$ an $V(x)$ isahkan oleh $V(x)$ dan $V(x)$. Beberapa fungsi tersebar luas dalam aplikasi untuk model pe n dan n sebagai satu kesatuan yang selalu non negatif. Sebagai contoh n n

bagian Sistem yang non negatif berada pada \mathbb{R}^n_+ dan representasikan komponen populasi yang interaksinya dimodelkan fungsi

Dari penjelasan di atas, maka dapat digambarkan persistensi Sistem merupakan kondisi dimana tidak ada komponen populasi yang punah dalam suatu Sistem (Butler G dan Waltman P, 1986). Secara geometri, sistem dikatakan persisten jika trayektori dari setiap komponen populasi menjauhi sumbu koordinat.

Kemudian beberapa teori persisten yang berkaitan dengan pembaharuan penelitian ini akan dibahas terlebih dahulu. Untuk memberikan gambaran tentang konsep lokal dan sistem persamaan diferensial linier disebut invarian maka semua penyelesaian dengan definisi untuk setiap $t \geq 0$ dan $t \leq 0$ dinamakan variabel semua penyelesaian dengan definisi untuk setiap $t \geq 0$ dan $t \leq 0$ untuk setiap t . Salah satu contoh invarian adalah titik ekuilibrium suatu Sistem persamaan diferensial.

Definisi 2.9 (Hirsch dan Thieme, 2006)

Assumsikan S subset invarian maju terhadap (1) , dengan S subset tertutup relatif terhadap (1) dan invarian maju lokal. a. S dinamakan *weak repeller* untuk (1) jika dapat diperoleh $\epsilon > 0$ sehingga S_ϵ untuk semua penyelesaian dengan $t \geq 0$. b. S dinamakan *strong repeller* untuk (1) jika dapat diperoleh $\epsilon > 0$ sehingga S_ϵ untuk semua penyelesaian dengan $t \geq 0$.

Teorema 2.10 (Hirsch dan Thieme, 2006)

Assumsikan (1) kontinu dan (1) invarian maju untuk (1) dalam \mathbb{R}^n_+ dan $t \geq 0$ ketika $t \geq 0$. himpunan terbatas dan ekuilibrium dalam \mathbb{R}^n_+ Assumsikan bahwa penyelesaian berawal dan ada dalam \mathbb{R}^n_+ untuk setiap waktu yang konvergen terhadap salah satu titik ekuilibrium. Setiap ekuilibrium di \mathbb{R}^n_+ membentuk himpunan invarian yang terisolasi di \mathbb{R}^n_+ .

merupakan *weak repeller* untuk sehingga tidak siklik (acyclic) dalam Maka dikatakan *uniform strong repeller* untuk

Beberapa definisi berikut memperjelas macam persistensi yang mungkin terdapat dalam suatu Sistem.

Definisi 2.26 (Butler G dan Waltman P, 1986)

Dikatakan persisten lemah jika untuk setiap $\epsilon > 0$.

Definisi 2.27 (Butler G dan Waltman P)

Dikatakan persisten jika untuk setiap $\epsilon > 0$.

Definisi 2.27 (Butler G dan Waltman P, 1986)

Dikatakan ϵ -persisten jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $\epsilon > 0$

III. PEMBAHASAN

3.1 Analisis kestabilan global dalam model pertumbuhan dua mikroorganisme di medium Kemostat.

Dari latar belakang permasalahan di atas telah diketahui bahwa sistem dari model kemostat untuk dua mikroorganismenya adalah :

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = \mu - c(t) \\ \dot{p}_i(t) = \mu c(t) - p_i(t) \end{cases} \quad (1)$$

dan diberikan nilai awal

$$c(0) = c_0 > 0, \quad p_i(0) = p_{i0} > 0, \quad \text{dan } q(0) = q_0 > 0.$$

Lebih lanjut diasumsikan fungsi respon $\mu(c(t))$ untuk $i = 1,2$ sebagai berikut :

- i. $\mu \in C^1(\mathbb{R}_+)$
- ii. μ diferensiabel kontinu,
- iii. $\mu(0) = 0$,
- iv. $\mu(c)$ naik monoton pada \mathbb{R}_+ ,

Berikut ini, diberikan teorema mengenai kestabilan global dari titik ekuilibrium untuk model Sistem (1).

Telah dibuktikan di penelitian sebelumnya (Herri Sulaiman, 2015) bahwa titik ekuilibrium $E_1(1,0,0)$ stabil asimtotik lokal. Berikut ini akan diberikan teorema yang membahas tentang kestabilan global untuk titik ekuilibrium $E_1(1,0,0)$ dan $E_2(0,1,0)$.

Teorema 2.1

Diketahui Sistem (1) dengan λ_1, λ_2 maka solusi dari Sistem (1) memenuhi $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$.

Bukti :

a. Diketahui dari Sistem (1) yaitu :

$$\dot{p}(t) = p(t) - A_1 p(t) \quad (1.1)$$

Untuk membuktikan $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$, dimisalkan t_0 lebih dahulu ($t_0 > 0$)

Karena $\lambda_1 - D_1 < 0$ maka didapat dengan konstanta. Karena $\lambda_2 - D_1 > 0$ maka didapat $D_1 - \lambda_2$. Oleh karena itu Persamaan (1.1)

menjadi

$$\frac{dp}{dt} = - (t - t_0) p$$

$$\frac{dp}{p} = -A_1 dt$$

$$\frac{dp}{p} = -A_1 dt$$

Lebih lanjut dengan mengintegrasikan ruas kiri dan kanan diperoleh

$$\frac{dp}{p} = -A_1 dt$$

$$\ln|p(t)| = -At + c$$

$$e^{\ln|p(t)|} = e^{-At + c}$$

$$p(t) = e^{-At + c}$$

dengan menggunakan prinsip apit didapat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-At + c} = 0$$

dengan kata lain $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$.

b. Diketahui $\lim_{t \rightarrow 0} q(t) = 0$ dari Sistem (1).

$$q(t) = a(t)$$

Untuk membuktikan $\lim_{t \rightarrow 0} q(t) = 0$, dilakukan terlebih dahulu minimum karena $1) - D_1 < 0$ maka $q(t) > 0$ dengan konstanta. Karena $D_2 > 0$ maka $q(t) < 0$. Oleh karena itu Persamaan (1) menjadi

$$\frac{dq(t)}{dt} = -3t$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = -3t$$

$$\frac{dq(t)}{q(t)}$$

Lebih lanjut dengan mengintegrasikan ruas kiri dan kanan diperoleh

$$\frac{dq(t)}{q(t)} = -3t$$

$$\ln|q(t)| = -Bt + c$$

$$e^{\ln|q(t)|} = e^{-Bt + c}$$

$$q(t) = e^{-Bt + c}$$

dengan menggunakan prinsip apit didapat

$$\lim_{t \rightarrow 0} q(t) = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-Bt + c} = 0$$

dengan kata lain $\lim_{t \rightarrow 0} q(t) = 0$.

c. Diketahui Persamaan (1).

$c(t) = 1 - c(t) - \dots$ dari pembuktian (a) dan (b) diperoleh

$\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = 0$ dan $\lim_{t \rightarrow 0} q(t) = 0$. Dengan demikian Persamaan (1) menjadi :

$$\frac{dc(t)}{dt} = 1 - c(t)$$

$$\frac{dc(t)}{1 - c(t)}$$

Lebih lanjut dengan mengintegrasikan ruas kiri dan kanan diperoleh

$$\ln|1 - c(t)| = t + c$$

$$\ln|1 - c(t)| = t + c$$

$$\Leftrightarrow (1 - c(t)) = e^{t + c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - c(t)} = e^{t + c}$$

$$\Leftrightarrow (1 - e^{-c})e^{-t} = 1 - e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow e^{-t} = 1 - e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow e^{-t} = 1 - e^{-t}$$

Lebih lanjut untuk $c < 1$ oleh $(1 - e^{-c})e^{-t} = 1 - e^{-t}$ ini ekuivalen dengan $e^{-c} = 1 - e^{-t}$ karena itu $(1 - e^{-c})e^{-t} = 1 - e^{-t}$

$$c(t) = 1 + \frac{c(0)-1}{e^t}$$

Lebih lanjut untuk $c < 1$ akan diperoleh $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 1$. Jadi terbukti bahwa $\lim_{t \rightarrow \infty} (p(t), q(t)) = (1, 0)$. ■

Berdasarkan Teorema 3.1 jika

- Laju pertumbuhan mikroorganisme pertama lebih kecil dari laju aliran fluida yang keluar dari Sistem.
- Laju pertumbuhan mikroorganisme ke dua lebih kecil dari laju aliran fluida yang keluar dari Sistem.

Pada awal waktu berapapun proporsi dari nutrien, proporsi dari mikroorganisme pertama dan kedua, maka untuk waktu yang cukup lama pada akhirnya proporsi nutrien akan mendekati 1, sedangkan mikroorganisme pertama dan ke dua akan habis.

Pembuktian untuk titik ekuilibrium $E_2(1, 0)$ stabil asimtotik global dapat dijelaskan dalam teorema 3.2 di bawah ini.

Teori

Jika $\frac{1}{D_{\min}} < \tilde{c}$ maka semua solusi untuk sistem (1) akan konvergen ke $\lim_{t \rightarrow \infty} (p(t), q(t)) = (1, 0)$.

Bukti :

Syarat $\frac{1}{D_{\min}} < \tilde{c}$ ekivalen dengan $\tilde{c} > 1$ sehingga $\tilde{c} > 1$. Sedangkan untuk $D_{\min}^{-1} < \tilde{c}$ jika $\frac{1}{D_{\min}} < \tilde{c}$ misalkan diambil $D_{\max} < d_1$ dan $D_{\min} > d_2$ sedemikian sehingga $\frac{1}{D_{\min}} < \tilde{c}$ menurut teorema 2 (di landasan

$1 - \frac{1-\epsilon}{D_1} \frac{K_2(\epsilon)}{p'}$ bernilai nega jika $0 < \epsilon < \frac{1}{D_1}$ dan hanya bernilai positif jika $\epsilon > \frac{1}{D_1}$. Untuk $\epsilon = \frac{1}{D_1}$, nilai ini adalah nol. Sehingga dapat dikatakan komponen pertama dari h bernilai negatif dan mendekati 0 untuk $\epsilon \in (0, \frac{1}{D_1})$ jika dan hanya jika $\epsilon < \frac{1}{D_1}$. Kemudian untuk $\epsilon > \frac{1}{D_1}$, nilai ini akan bernilai positif.

Jika $\epsilon > \frac{1}{D_1}$, maka:

$$\frac{K_2(\epsilon)}{p'} - \frac{1-\epsilon}{D_1} p_1 > 0$$

Sehingga komponen dari persamaan (1) akan menuju ke 0 jika dan hanya jika $p(\epsilon) = \frac{1-\epsilon}{D_1}$ dengan catatan bahwa ϵ adalah nilai positif. Menurut definisi dari ϵ , kita tahu bahwa $\epsilon < 1$ untuk $0 < \epsilon < 1$. Sehingga nilai dari h akan bernilai positif. Jika $\epsilon > \frac{1}{D_1}$, semua komponen dari h akan bernilai positif.

Jika kita asumsikan bahwa $p(\epsilon) > \frac{1-\epsilon}{D_1}$, perlu diketahui bahwa $p(\epsilon)$ hanya bernilai positif jika $\epsilon > \frac{1}{D_1}$. Menurut definisi dari ϵ , kita tahu bahwa $\epsilon < 1$ untuk $0 < \epsilon < 1$. Sehingga h akan bernilai positif untuk $\epsilon > \frac{1}{D_1}$ dan akan bernilai negatif jika $\epsilon < \frac{1}{D_1}$.

Menurut teorema 2 (di landasan teori) setiap solusi dari sistem persamaan (1) yang terbatas termuat di $[0, 1]$ dan menurut teorema 2 (di landasan teori) setiap solusi untuk sistem model (1) akan mendekati himpunan invarian terkecil dari (t, p) untuk $\epsilon \in (0, 1)$.

- dan oleh masing-masing komponen yaitu:
- $(0, 1)$ dimana $\epsilon \in [0, 1]$
 - $\frac{1-\epsilon}{D_1}$ dimana $\epsilon \in [0, 1)$

(p dimana $p \in [0, 1)$)

Karena terbatas maka setiap titik ($1, 0$) tidak dapat dibentuk ke dalam himpunan himpunan solusi yang berdekatan titik ekuilibrium interior

titik ($1, 0$) dengan ϵ dan δ sehingga akan menjadi $0 = p(1, 0) - p(1, \frac{1-\epsilon}{L_1})$ dari persamaan kedua di sistem (1)

yaitu $\frac{dp}{dt} = 0$ dengan $\frac{dq}{dt} < 0$. Dengan demikian $\Omega = \{ (1, 0) \}$ sehingga terbukti

bahwa sistem (1) konvergen ke

lim $(t, q(t))$

3.3. Simulasi Solusi dan Potret Fase

Berikut ini diberikan ilustrasi perilaku proporsi dari nutrisi $c(t)$, mikroorganisme pertama $p(t)$ dan mikroorganisme ke dua $q(t)$ terhadap waktu dengan menggunakan software MATLAB versi R.2011.A.

3.3.1. Perilaku dari proporsi nutrisi dan kedua mikroorganisme dengan titik ekuilibrium $E_1(1, 0, 0)$.

Berikut ini akan disajikan simulasi dari proporsi nutrisi, mikroorganisme pertama dan ke dua pada kondisi bebas dari mikroorganisme pertama dan ke dua.

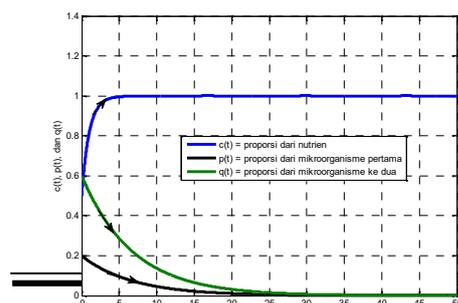
Dalam simulasi ini dipilih $\frac{mc}{a+c}$ dan $\frac{nc}{b+c}$ dengan $m = 0.36$ $n = 0.4$: $a = 0.1$; $b = 0.6$; $D_1 = D_2 = 1.1$. Teorema 3.1 telah menunjukkan bahwa

titik ekuilibrium $E_1(1, 0, 0)$ stabil asimtotik global jika $\frac{m}{a+c} < 1$ dan $\frac{n}{b+c} < 1$

ketahu $\frac{mc}{a+c} = \frac{0.36}{0.1+1} = \frac{0.36}{1.1} = 0.32$ sehingga memenuhi

$\frac{m}{a+c} < 1$ berikutnya ditahu $\frac{nc}{b+c} = \frac{0.4}{0.6+1} = \frac{0.4}{1.6} =$

0.25 sehingga memenuhi $\frac{n}{b+c} < 1$

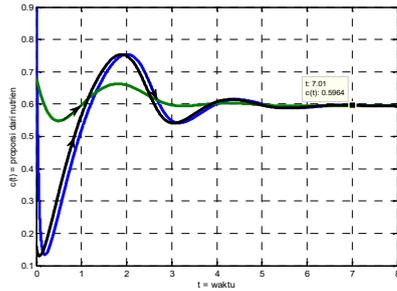


dan pada gambar di atas terlihat bahwa untuk tiga syarat awal yaitu $(c_0, p_0, q_0) = (5, 0.2, 0.6)$, maka solusi $c(t)$, $p(t)$ dan $q(t)$ menuju titik ekuilibrium $E_1(1,0,0)$ dengan $c = 1$, $p = 0$ dan $q = 0$. Titik ekuilibrium $E_1(1,0,0)$ disebut juga sebagai titik ekuilibrium bebas mikroorganisme, yang berarti di dalam medium kultur sudah tidak ada lagi mikroorganisme pertama dan kedua, hanya nutrisi saja yang tetap berada di dalam medium kultur.

3.3.2. Perilaku dari konsentrasi nutrisi dan kedua mikroorganisme dengan titik ekuilibrium $E_2(\frac{1-a}{D_1}, 0, 0)$

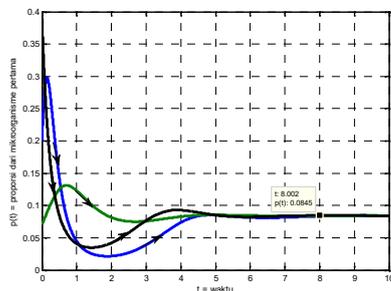
Berikut ini disajikan simulasi dari proporsi nutrisi, mikroorganisme pertama dan kedua pada kasus bas dari mikroorganisme ke dua. Dalam simulasi ini dipilih $\mu(c) = \frac{mc}{a+c}$ dan $\nu(c) = \frac{nc}{b+c}$ dengan $m = 12$, $n = 10$, $a = 0.8$, $b = 0.6$, dan $D_1 = D_2 = 5.1$. Teorema 3.2 mengkonfirmasikan secara analitis bahwa sistem ini memiliki titik ekuilibrium $E_2(\frac{1-a}{D_1}, 0, 0)$ adalah $\frac{1-a}{D_1} > D_1$ dengan $\mu(\frac{1-a}{D_1}) > D_1$ ketahuilah $\mu(c) = \frac{m}{a+c}$ nilai dari $\mu(\frac{1-a}{D_1})$ adalah 66 sehingga memenuhi $\mu(\frac{1-a}{D_1}) > D_1$. Nilai dari $\nu(\frac{1-a}{D_1})$ didapat $\Leftrightarrow 5.1 = \frac{10}{0.8}$
 $\Leftrightarrow 5.1(0.8) = 10$
 $\Leftrightarrow 4.08$
 $\Leftrightarrow -6.9$

Karena $\mu(\frac{1-a}{D_1}) > D_1$ maka didapat $\frac{1-a}{D_1} = 0.59$. Jadi diperoleh titik ekuilibrium $E_2(\frac{1-a}{D_1}, 0, 0)$ adalah $(0.59, 0.08, 0)$. Teorema 3.2 telah mengkonfirmasikan bahwa ini adalah titik ekuilibrium stabil untuk titik ekuilibrium $E_2(\frac{1-a}{D_1}, 0, 0)$ adalah $\nu(\frac{1-a}{D_1}) > D_1$ demikian, diperoleh $\nu(\frac{1-a}{D_1}) = \frac{10 \cdot 0.8}{0.6 \cdot 0.8} = 4.95$ yang memenuhi $\nu(\frac{1-a}{D_1}) > D_1$. Berarti E_2 stabil asimtotik global.



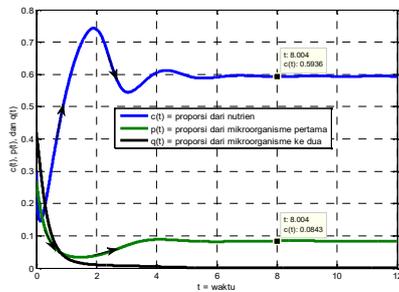
Dari gambar di atas terlihat bahwa untuk pengambilan tiga nilai awal yaitu $c_0 = 0.9, 0.68, 0.16$, maka solusi $c(t)$ yang menyatakan proporsi dari nutrisi akan menuju ke titik 0.59. Dari gambar di atas dapat diartikan bahwa proporsi dari nutrisi pada akhirnya akan dekat dengan 0.59 (yaitu 1/2) untuk nilai awal yang berada lebih kecil maupun lebih besar dari 0.59.

Berikut ini disajikan grafik solusi $p(t)$ terhadap waktu yang menyatakan proporsi dari mikroorganisme pertama yang berada di dalam medium kultur dengan nilai awal $p_0 = 0.2, 0.07, 0.39$.



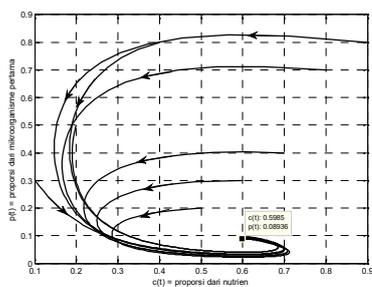
Dari gambar di atas diketahui bahwa untuk pengambilan tiga nilai awal yaitu $p_0 = 0.2, 0.07, 0.39$, maka solusi $p(t)$ yang menyatakan proporsi dari mikroorganisme pertama akan menuju ke titik 0.08. Hal ini menunjukkan bahwa proporsi mikroorganisme pertama pada akhirnya akan dekat dengan 0.08 (yaitu $\frac{1}{12}$) untuk nilai awal yang berada lebih kecil maupun lebih besar dari $\frac{1}{12}$.

Berikut ini disajikan grafik solusi $c(t)$, $p(t)$ dan $q(t)$ terhadap waktu yang menyatakan proporsi dari nutrisi, mikroorganisme pertama dan mikroorganisme kedua yang berinteraksi di dalam medium kultur dengan nilai awal $(c_0, p_0, q_0) = (0.3, 0.27, 0.42)$.



Berdasarkan gambar di atas terlihat bahwa untuk syarat awal $(0.3, 0.27, 0.42)$, maka solusi $c(t)$, $p(t)$ dan $q(t)$ pada akhirnya akan menuju atau konvergen ke titik ekuilibrium $E_2(0.59, 0.08, 0)$.

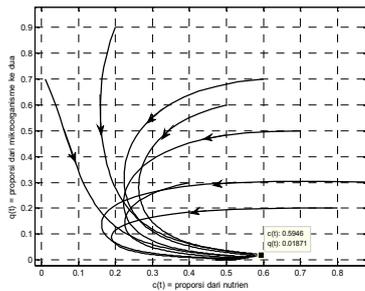
Berikut ini disajikan proyeksi potret fase $c(t)$ terhadap $p(t)$ yang menyatakan proporsi dari nutrisi dan mikroorganisme pertama yang saling berinteraksi di dalam medium kultur.



Dari gambar di atas terlihat bahwa setiap trayektori penyelesaian $c(t)$ dan $p(t)$ pada pengambilan nilai awal yaitu $(0.5, 0.2)$, $(0.6, 0.3)$, $(0.4, 0.8)$, $(0.1, 0.3)$, $(0.2, 0.5)$ dan $(0.4, 0.8)$ akan menuju ke titik $(0.59, 0.08)$. Hal ini menunjukkan untuk waktu yang cukup lama, proporsi dari nutrisi pada akhirnya akan dekat

dengan 0.59 dan proporsi dari mikroorganisme pertama pada akhirnya akan dekat dengan 0.08.

Berikut ini disajikan proyeksi potret fase $c(t)$ terhadap $q(t)$ yang menyatakan proporsi dari nutrisi dan mikroorganisme ke dua yang saling berinteraksi di dalam medium kultur.



Dari gambar di atas terlihat bahwa setiap trayektori penyelesaian $c(t)$ dan $q(t)$

apa pengambilan nilai awal yaitu $(0.5, 0.6), (0.6, 0.7), (0.2, 0.5), (0.7, 0.5), (0.8, 0), (0.2, 0.9)$ dan $(0.01, 0.7)$ menuju atau konvergen ke titik $(c = 0.59, 0)$. Hal ini menunjukkan interaksi antara nutrisi dan mikroorganisme ke dua, pada akhirnya mikroorganisme ke dua akan habis dan proporsi nutrisi akan selalu dekat dengan 0.59.

IV. PENUTUP

A. Kesimpulan

Diberikan model kemostat untuk dua mikroorganisme yaitu pada Sistem (1) di atas. Dari pembahasan dan pembuktian teorema pada bab pembahasan maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Titik Ekulibrium $E_1 (1,0,0)$ merupakan titik ekulibrium stabil asimtotik global. Interpretasi hal tersebut jika (a). Laju pertumbuhan mikroorganisme pertama lebih kecil dari laju aliran fluida yang keluar dari Sistem (b). Laju pertumbuhan mikroorganisme ke dua lebih kecil dari laju aliran fluida yang keluar dari Sistem. Pada awal waktu berapapun proporsi dari nutrisi, proporsi dari

mikroorganisme pertama dan kedua, maka untuk waktu yang cukup lama pada akhirnya proporsi nutrisi akan mendekati 1, sedangkan mikroorganisme pertama dan kedua akan habis.

2. Titik Ekuilibrium E_2 merupakan titik ekuilibrium yang stabil asimtotik global. Interpretasi hal tersebut jika laju aliran fluida yang keluar dari Sistem lebih besar dari laju pertumbuhan mikroorganisme ke dua terhadap nutrisi. Pada awal waktu proporsi dari r dekat dengan r mikroorganisme pertama dekat dengan $\frac{1-r}{D_1}$ proporsi mikroorganisme kedua sangat kecil. Untuk waktu yang cukup lama, proporsi nutrisi akan mendekati 1, mikroorganisme pertama akan mendekati $\frac{1-r}{D_1}$ mikroorganisme ke dua akan habis.

3. Ilustrasi perilaku proporsi berupa simulasi numerik dan potret fase dari nutrisi $c(t)$, mikroorganisme pertama $p(t)$ dan mikroorganisme ke dua $q(t)$ terhadap waktu akan konvergen ke masing-masing titik ekuilibriumnya yaitu untuk :

$E_1 (1,0,0)$ dan E_2 dalam hal ini dapat diartikan yakni dengan pengambilan beberapa nilai awal, solusi dari sistem model matematika untuk pertumbuhan dua mikroorganisme di medium kemostat akan menuju atau konvergen ke titik ekuilibriumnya.

B. Saran

Pada bagian ini peneliti hanya membuktikan stabilitas global untuk dua kasus titik ekuilibrium yaitu $E_1 (1,0,0)$ dan E_2 . Dalam hal ini peneliti belum membuktikan untuk kasus titik ekuilibrium E_3 apakah stabil asimtotik global atau tidak. Dengan demikian perlu adanya kajian lebih lanjut untuk membuktikan atau menemukan titik ekuilibrium yang lain. Lebih lanjut, perlu adanya penelitian berupa pengembangan lanjutan mengenai kasus-kasus yang serupa seperti adanya bifurkasi Hopf atau Transkritikal pada model pertumbuhan

mikroorganisme di medium kemostat guna menyelidiki eksistensi kestabilan dari masing-masing titik ekuilibriumnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., 2004, *Aljabar Linear Elementer edisi kedelapan*. Jakarta : Erlangga.
- Atlas, R.M., 2010, *Handbook of Microbiological Media*. USA : CRC Press.
- Bingtuan Li dan Yang Kuang., 2000, Simple Food Chaid In A Chemostat With Distinct Removal Rates, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pp : 75 - 92.
- Gantmacher, F.R., 1959, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y.
- Hanh, W., 1967, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Inc., New York.
- HL. Smith dan Paul W., 1995, *The Theory of The Chemostat* . Cambridge University Press.
- Kapur, J.N., 1985, *Mathematical Models in Biology and Medicine*, Affiliated East – West Press Pvt. Ltd. New Delhi.
- Khalil, H.K., 2002, *Nonlinear System* (Third Edition), Prentice-Hall, Inc, New Jersey.
- Luenberger, D.C., 1979, *Introduction to Dynamic Systems*, John Willey and Sons, Inc, United States.
- Olsder, G.J., 1994, *Mathematical Systems Theory*, Delftse Uitgevers Matschappij b.v., Netherlands.
- Perko, L., 1993, *Differential Equations and Dynamical System*, Springer- Verlag, Inc., New York.
- Qu, Zhinhua, 2009, *Cooperative Control of Dynamical System : Aplications to autonomous Vehicles*, Springer-Verlag, Inc, New York.
- Shahadat. H dan Chandra, N.P., 2006, Stability of a Chemostat Model of Two Microorganisms, *BRAC University Journal*, Vol III, No. 1, pp : 53-58.

Sulaiman, Herri., 2013, *Aplikasi Model Matematika dalam Pertumbuhan Mikroorganisme di Medium Kemostat*. Cirebon : Jurnal Logika Unswagati.

Sulaiman, Herri., 2015, *Analisa Kestabilan Lokal dalam Pertumbuhan Mikroorganisme di Medium Kemostat*. Cirebon : Jurnal Euclid Unswagati, Vol.2. No.1. Edisi Januari 2015.

Susanta, B., 1989, *Pemodelan Matematis*. Jakarta : Modul UT.

Tarumingkeng, R.C., 1994, *Dinamika Populasi Kajian Ekologi Kuantitatif*. Jakarta : Pustaka Sinar Harapan.

Wiggins, S., 1996, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Springer-Verlag, Inc., New York.