ANALISIS STABILITAS SISTEM DINAMIK UNTUK MODEL MATEMATIKA EPIDEMIOLOGI TIPE-SIR (*SUSCEPTIBLES, INFECTION, RECOVER*)

Herri Sulaiman
Program Studi Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Swadaya Gunung Jati Cirebon
hs_msc@yahoo.com

Abstrak

Epidemik merupakan penyebaran suatu penyakit menular dalam suatu populasi. Di dalam artikel ini dibahas penyakit yang menyebar dalam suatu populasi homogen mengenai kontak langsung antar individu dan ada kemungkinan untuk sembuh. Jika munculnya kasus penyakit mewabah yang kemudian menyebar dalam populasi namun membutuhkan waktu yang cukup lama, maka tidak setiap anggota dalam populasi dengan mudah terkena penyakit tersebut. Dengan demikian kasus inilah yang disebut dengan epidemik yang berarti sifat dari suatu penyakit yang tidak dapat hilang dari populasi walaupun dapat disembuhkan, namun dalam jangka waktu tertentu dapat kembali mewabah. Maka dari itu, penulis membuat suatu model matematika epidemiologi tipe-SIR yang berkaitan dengan pertumbuhan populasi yang dipengaruhi oleh penyebaran penyakit atau virus yang bersifat endemik. Di dalam artikel ini dikenalkan R_0 sebagai variabel utama yang mempengaruhi kestabilan dan kesetimbangan dari sistem model dan titik ekuilibrium yang ditentukan cenderung nonhiperbolik karena salah satu nilai eigen bernilai nol.

Kata kunci: *SIR, R_0 , Titik Ekuilibrium, Nonhiperbolik.*

1. PENDAHULUAN

Epidemik merupakan penyebaran suatu penyakit menular dalam suatu populasi. Di dalam penelitian ini dibahas penyakit yang menyebar dalam suatu populasi homogen mengenai kontak langsung antar individu dan ada kemungkinan untuk sembuh. Populasi yang tumbuh dan berkembang memungkinkan terjadi penyebaran penyakit yang dapat dikontrol maupun tidak. Ada bermacam-macam tipe penyakit yang berkembang saat ini. Ada penyakit yang mudah sembuh dan tubuh menjadi kebal terhadap penyakit tersebut seperti cacar air dan campak. Ada pula penyakit yang apabila telah menyerang atau mengidap di dalam tubuh bisa sembuh namun jika kondisi tubuh memburuk maka penyakit tersebut dapat kembali menyerang seperti penyakit flu.

Jika munculnya kasus penyakit mewabah yang kemudian menyebar dalam populasi namun membutuhkan waktu yang lama maka tidak setiap anggota dalam populasi dengan mudah terkena penyakit tersebut. Kasus demikian yang disebut dengan epidemik. Sifat dari penyakit ini yang tidak bisa hilang dari populasi walaupun dapat disembuhkan, namun dalam jangka waktu tertentu bisa kembali mewabah. Model matematika epidemiologi tipe-SIR berkaitan dengan pertumbuhan populasi yang dipengaruhi oleh penyebaran penyakit menular yang bersifat endemik dengan R_0 (Basic Reproduction Ratio) sebagai variabel utama yang mempengaruhi kestabilan dan kesetimbangan dari model epidemiologi ini.

Untuk model tipe-SIR tanpa kelahiran dan kematian, R_0 dipengaruhi oleh laju kontak dan laju kesembuhan serta laju kontak perkapita. Sedangkan model tipe-SIR dengan kelahiran dan kematian R_0 dipengaruhi oleh laju kontak, laju kesembuhan, laju kematian dan laju kontak terinfeksi. Titik ekuilibrium endemik cenderung stabil asimtotik lokal jika laju kesembuhan dan laju kontak terinfeksi lebih besar dari laju kematian. (O.Diekmann & Heesterbeek J.A.P.2000: 2)

Rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu (1) bagaimana bentuk dari model matematika epidemiologi tipe-SIR tanpa kelahiran dan kematian, (2) bagaimana eksistensi dari titik ekuilibriumnya, (3) bagaimana interpretasi kestabilan dari masing-masing titik ekuilibrium yang telah didapatkan serta (4) bagaimana grafik simulasi numeris dari sistem model yang telah di buat. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah (1) menentukan model matematika epidemiologi tipe-SIR tanpa kelahiran dan kematian, (2) menentukan titik ekuilibriumnya, (3) menginterpretasikan kestabilan dari titik ekuilibrium yang telah diperoleh, dan (4) menentukan grafik simulasi numeris dari sistem model epidemiologi tipe-SIR yang telah diperoleh.

Lebih lanjut, manfaat dari penelitian ini adalah (1) membuka penelitian lebih lanjut mengenai pertumbuhan populasi yang dipengaruhi oleh penyebaran suatu penyakit atau virus yang bersifat endemik, dan menambah khasanah ilmu pengetahuan dalam hal integrasi dan interkoneksi antara matematika dan biologi, khususnya dalam bidang kajian matematika epidemiologi. (2) Bagi program studi pendidikan matematika sebagai bahan ajar untuk mata kuliah persamaan diferensial. Karena dalam matakuliah tersebut perlu di perkenalkan kepada peserta didik dalam hal ini mahasiswa mengenai aplikasi dari persamaan diferensial dalam kehidupan sehari-hari. Sehingga tujuan pembelajaran dapat tercapai dan kebutuhan belajar mahasiswa juga dapat terpenuhi.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Rasio Reproduksi Dasar *(Basic Reproduction Ratio)*

Untuk mengetahui tingkat penyebaran atau besarnya transmisi terjadinya infeksi saat terjadinya kontak antara subpopulasi rentan dengan populasi terinfeksi maka perlu dikenalkan suatu nilai ukuran. Karena proses terinfeksi membutuhkan selang waktu untuk dapat mempengaruhi saat kontak berlangsung dan terdapat periode antara individu yang telah terkontaminasi untuk menjadi terinfeksi ataupun penginfeksi. Maka perlu dikenalkan Basic Reproduction Ratio (R_0) sebagai nilai ukuran terhadap pertumbuhan populasi.

Laju pertumbuhan awal (R_0) adalah nilai ukuran/ekspektasi jumlah kasus sekunder (setelah terjadi kontak) terhadap kasus primer/awal (sebelum terjadi kontak) di dalam populasi yang masih murni (O.Diekmann & Heestebeek, J.A.P, 2000: 15). Namun ada pula yang mengartikan rasio atau perbandingan yang menunjukkan jumlah individu rentan (susceptible) yang menderita penyakit yang diakibatkan oleh satu individu yang terinfeksi (infected). Jika model hanya mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik maka tidak terjadi endemik jika $\mathrm{R}_0 < 1$ dan terjadi endemik jika $\mathrm{R}_0 > 1$.

Dengan demikian dari penjelasan di atas dapat didefinisikan bahwa:

$R_0 = \int_0^{\infty} c.A(t)dt,$

diasumsikan bahwa :

c adalah konstanta (positif), t adalah lamanya infeksi (waktu), dan A(t) adalah probabilitas individu yang rentan untuk terinfeksi saat terjadi kontak dengan individu lain yang terinfeksi selama waktu ke-t.

2.2. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Diberikan sistem persamaan diferensial :

$\frac{dx}{dt} = f(x, y),$

$\frac{dy}{dt} = g(x, y).$ **(1)**

sebuah titik $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ merupakan titik ekuilibrium dari sistem **(1)** jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ dan $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan yaitu :

$x(t) = \bar{x}_0$ dan $y(t) = \bar{y}_0$ adalah penyelesaian/solusi kesetimbangan dari sistem **(1)** untuk semua t.

2.3. Stabil Asimtotik Lokal

Kestabilan asimtotik lokal merupakan merupakan kestabilan dari sistem linear atau kestabilan dari linearisasi untuk sistem yang nonlinear. Kestabilan lokal pada titik ekuilibrium ditentukan oleh tanda bagian real dari akar-akar karakteristik sistem dari matriks Jacobian yang dihitung di sekitar titik ekuilibriumnya.

Definisi 1: Jika J adalah matriks yang berukuran n×n maka vektor tak nol dinamakan vektor karakteristik dari J jika memenuhi :

$$\mathrm{J}x = \lambda x \qquad \textbf{(2)}$$

untuk suatu skalar λ disebut nilai karakteristik dari J dan x dikatakan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai karakteristik matriks J yang berukuran n×n, maka dapat dituliskan kembali persamaan **(2)** sebagai $\mathrm{J}x = \lambda I x$ atau ekuivalen dengan $(J - \lambda I)x = 0$,mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika $|J - \lambda I| = 0$. Jika matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka persamaan (2) dapat ditulis :

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau $\lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc = 0$. Jadi akar-akar karakteristiknya adalah:

$\lambda_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}.$

Dengan menggunakan matriks Jacobian, sifat kestabilan titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dapat diketahui asalkan titik ekuilibrium tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi dari titik ekuilibrium yang hiperbolik.

Definisi 2: Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan titik ekuilibrium hiperbolik dari Sistem (1) jika semua bagian real dari semua nilai eigen matriks Jacobian tidak bernilai nol.

Teorema 3: Titik ekuilibrium $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

3. METODOLOGI PENELITIAN

Jenis penelitian yang digunakan dalam artikel ini adalah penelitian kepustakaan (library research) yaitu penelitian yang pengumpulan datanya dilakukan dengan menghimpun data dari berbagai literatur. Literatur di sini tidak terbatas pada buku-buku saja melainkan dapat juga berupa bahan-bahan dokumentasi, serta bahan-bahan lain yang diambil dari internet. Berikut ini

a. Studi Literatur
b. Penyelesaian secara analitis
c. Interpretasi
d. Kesimpulan

4. ANALISIS PEMBAHASAN

4.1. Model Matematika Epidemiologi Tipe-SIR Tanpa Kelahiran Dan Kematian

Model ini dikembangkan atas dasar untuk mengetahui laju penyebaran dan kepunahan dari suatu wabah penyakit dalam populasi yang bersifat tertutup dan bersifat epidemik. Kasus ini bermula dari kejadian yang terjadi di London tahun 1665-1666 dan Bombay pada tahun 1906. Penyakit yang mewabah pada saat itu yaitu kolera. Untuk menggambarkan proses penyebaran beserta dengan laju penyebarannya dalam populasi tersebut, diberikan beberapa asumsi dasar sehingga kejadian tersebut dapat dimodelkan ke dalam bentuk model matematika. Asumsi tersebut yaitu :

a. Populasi tetap yaitu tidak terjadi proses migrasi antar populasi dan terjadi dalam suatu wilayah.
b. Masa inkubasi adalah nol atau tidak ada masa inkubasi jika terjadi penularan atau penyebaran penyakit terhadap individu atau subpopulasi.
c. Individu-individu dalam populasi dibagi menjadi tiga kelompok yakni :

1. *S(Susceptibles)*: kelompok ini terdiri dari populasi manusia yang tidak terkena penyakit namun mempunyai kemungkinan untuk tertular penyakit.

2. *I(Infectivies)*: kelompok ini terdiri dari populasi manusia yang telah terinfeksi (terkena penyakit).

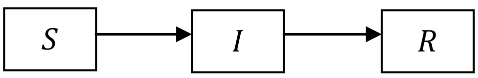
3. *R(Recovery)*: kelompok ini terdiri dari populasi manusia yang telah sembuh dari penyakit dan tidak akan terserang lagi oleh virus yang sama. Sehingga individu sudah kebal dari virus tersebut.

Lebih lanjut diasumsikan bahwa :

4. Laju kesembuhan dari infeksi bernilai konstan ($\alpha > 0$).

5. Laju penularan penyakit melalui kontak antara terinfeksi (*infectivies*) dan rentan (*susceptibles*) bernilai konstan ($\beta > 0$).

Dari penjelasan di atas maka dapat dibuat diagram transfer untuk model epidemiologi tipe-SIR tanpa kelahiran dan kematian sebagai berikut :



Gambar 1. Diagram transfer untuk model epidemiologi tipe-SIR

Dari gambar di atas dapat dijelaskan bahwa model tipe-SIR berasal dari satu populasi dimana fase rentan (S), Infeksi (I) dan sembuh (R) berada di dalamnya. Jumlah populasi selalu berubah-ubah antara populasi rentan menuju ke populasi terinfeksi menuju ke populasi sembuh. Hal ini disebabkan oleh penambahan maupun pengurangan jumlah populasi yang mengalami perubahan baik perpindahan populasi dari rentan menuju ke terinfeksi maupun dari terinfeksi menuju ke populasi sembuh. Laju penularan penyakit melalui kontak antara populasi rentan (*susceptibles*) ke populasi terinfeksi (*infectivies*) yang bernilai konstan (β) mengalami pengurangan jumlah dalam populasi rentan terhadap selang waktu. Dalam hal ini dikarenakan jumlah populasi rentan mengalami keluar-masuk menuju populasi terinfeksi, dan (α) sebagai laju kesembuhan dari terinfeksi yang bernilai konstan dan mengalami pengurangan yang disebabkan oleh populasi yang mengalami pengeluaran dan menuju ke populasi sembuh.

Dengan demikian dari penjelasan di atas maka model matematika epidemiologi untuk tipe-SIR tanpa kelahiran dan kematian adalah:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \ ,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I \ . \qquad (4.1)$$

4.2. Eksistensi dari titik ekuilibrium model epidemiologi tipe-SIR tanpa kelahiran dan kematian

Berikut ini akan diselidiki titik ekuilibrium untuk sistem (4.1). Diperhatikan sistem (4.1) lebih lanjut didefinisikan untuk fungsi-fungsi sebagai berikut :

$$f_1(S, I) = -\beta SI \qquad (4.2)$$

$$f_2(S, I) = \beta SI - \alpha I \qquad (4.3)$$

dan $\mathbf{f}(S_u, I_u) = (f_1, f_2)^T$.

Teorema 4.1.1:

Sistem (4.1) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dengan $E_0 = (0,0)$ dan $E_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right)$.

Bukti :

Titik ekuilibrium dari sistem (4.1) dapat dicari dengan membuat masing-masing nol pada dua persamaan tersebut yaitu :

$$-\beta SI = 0 \qquad (4.4)$$

$$\beta SI - \alpha I = 0. \qquad (4.5)$$

Untuk persamaan ke-tiga di sistem (4.1) tidak digunakan karena variabel tidak saling mempengaruhi dengan persamaan ke-1 dan 2. Dengan demikian diperoleh bahwa jika $S = 0$ maka $I = 0$ sehingga didapat titik ekuilibrium $E_0 = (0,0)$. Apabila $\beta S - \alpha = 0$ dan $I = 0$ maka dari persamaan (4.5) didapat :

$$I(\beta S - \alpha) = 0$$

$$S = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Jadi didapat titik ekuilibrium $E_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right)$.

Berikut ini akan dianalisis kestabilan titik ekuilibrium dari sistem (4.1) yang berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian untuk fungsi (4.4)-(4.5).

Teorema 4.1.2:

Matriks Jacobian fungsi $f = (f_1, f_2)^T$ yang didefinisikan pada fungsi (4.4)-(4.5) di (S, I) adalah :

$$D\mathbf{f}(S,I) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}.$$

Bukti:

$$\frac{\partial f_1}{\partial S} = -\beta I, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial I} = -\beta S,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S} = \beta I, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial I} = \beta S - \alpha.$$

Maka diperoleh matriks Jacobian untuk fungsi $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ yang didefiniskan pada (4.4) - (4.5) di (S, I) adalah :

$$D\mathbf{f}(S,I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S}(S,I) & \frac{\partial f_1}{\partial I}(S,I) \\ \frac{\partial f_2}{\partial S}(S,I) & \frac{\partial f_2}{\partial I}(S,I) \end{bmatrix},$$

atau :

$$D\mathbf{f}(S,I) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}.$$

Pada teorema berikut ini dibahas mengenai kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu $E_0 = (0,0)$ dan $E_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right)$.

Lemma 4.1.3:

Rasio reproduksi dasar *(Basic Reproduction Ratio)* dari sistem model (4.1) adalah $R_0 = \frac{\beta N}{\alpha}$.

Bukti :

Untuk membuktikan toerema di atas, dimisalkan terlebih dahulu untuk :

P : probabilitas individu untuk tetap bertahan hidup setelah terinfeksi suatu penyakit.

A(t): probabilitas individu yang rentan terinfeksi saat terjadi kontak dengan individu lain yang telah terinfeksi dalam waktu ke-t.

Dengan demikian laju perubahan probabilitas untuk bertahan hidup setelah terinfeksi yakni :

$\frac{dP}{dt} = -\alpha P$ dengan $P(0) = 1$.

$\Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -\text{á}dt,$

$\Leftrightarrow \int \frac{dP}{P} = \int -\text{á}dt,$

$\Leftrightarrow \ln P = -\text{á}t + c,$

$\Leftrightarrow P(t) = e^{-\text{á}t}$.

Menurut persamaan pertama di sistem (4.1) yaitu $\text{â}SI = \text{â}N\frac{S}{N}I$, dimana $N = S + I + R$ merupakan total individu dari suatu populasi. Apabila minimal terdapat satu kasus kontak yang terinfeksi maka:

$\text{â}S = \text{â}N\frac{S}{N}$, dalam hal ini $\frac{S}{N}$ merupakan proporsi subpopulasi rentan dan $\text{â}N$ merupakan hasil kali dari jumlah kontak persatuan waktu dengan probabilitas perpindahan penyakit dari individu yang terinfeksi dengan individu rentan. Dengan demikian diperoleh perpindahan penyakit $\frac{\text{â}N}{t}$ sehingga :

$A(t) = \frac{\text{â}N}{t}.P(t),$

$\quad = \frac{\text{â}N}{t} e^{-\text{á}t}.$

Lebih lanjut, dengan menggunakan definisi R_0 didapat :

$R_0 = \int_0^\infty c.A(t)dt$

$\quad = c\int_0^\infty A(t)\,dt,$

$\quad = c\int_0^\infty \frac{\text{â}N}{t} e^{-\text{á}t} dt,$

Karena $\frac{\text{â}N}{t}$ merupakan konstanta dan c juga konstanta dengan $\frac{\text{â}N}{t} > 0$ dan $c > 0$ maka :

$\quad = \text{â}N\int_0^\infty e^{-\text{á}t} dt,$

$\quad = \frac{\text{â}N}{\text{á}}.$

Dengan demikian bukti sudah lengkap.

Teorema 4.1.4:

Diberikan $R_0 = \frac{\text{â}N}{\text{á}}$.

1. Titik ekuilibrium $\mathrm{E}_0 = (0,0)$ merupakan titik ekuilibrium yang nonhiperbolik.
2. Jika $\mathrm{R}_0 \leq 1$ maka titik ekuilibrium $E_1 = \left(\frac{\text{á}}{\text{â}}, 0\right)$ merupakan titik ekuilibrium yang nonhiperbolik.

Bukti:

1. Matriks Jacobian fungsi **f** di titik $E_0 = (0,0)$ adalah :

$$D\mathbf{f}(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\text{á} \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobian $D\mathbf{f}(E_0)$ adalah $|\text{ë}I - D\mathbf{f}(E_0)| = 0$. Dengan demikian :

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \text{ë} - 0 & 0 \\ 0 & \text{ë} + \text{á} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\text{ë})(\text{ë} + \text{á}) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \text{ë}_1 = 0\,, \text{ë}_2 = -\text{á} < 0.$$

Karena salah satu dari nilai eigen bernilai nol maka, sesuai dengan definisi 2, titik ekuilibrium $E_0 = (0,0)$ merupakan titik ekuilibrium yang nonhiperbolik.

2. Matriks Jacobian fungsi **f** di titik $E_1 = \left(\frac{\text{á}}{\text{â}}, 0\right)$ adalah :

$$D\mathbf{f}(E_1) = \begin{bmatrix} 0 & -\text{á} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobian $D\mathbf{f}(E_0)$ adalah $|\text{ë}I - D\mathbf{f}(E_1)| = 0$. Dengan demikian :

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \text{ë} - 0 & 0 \\ 0 & \text{ë} - 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\text{ë})(\text{ë}) = 0.$$

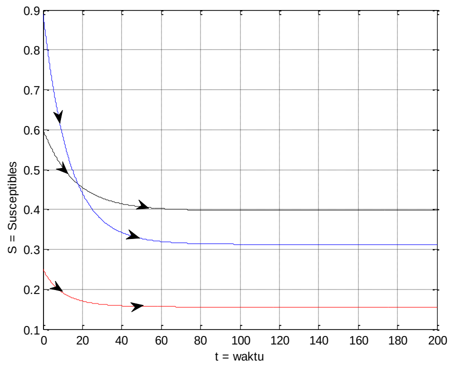
$$\Leftrightarrow \text{ë}^2 = 0 \Leftrightarrow \text{ë} = 0\,.$$

Karena nilai eigen bernilai nol maka, sesuai dengan definisi 2, titik ekuilibrium $E_1 = \left(\frac{\text{á}}{\text{â}}, 0\right)$ juga merupakan titik ekuilibrium yang nonhiperbolik.

4.3. Simulasi Numeris

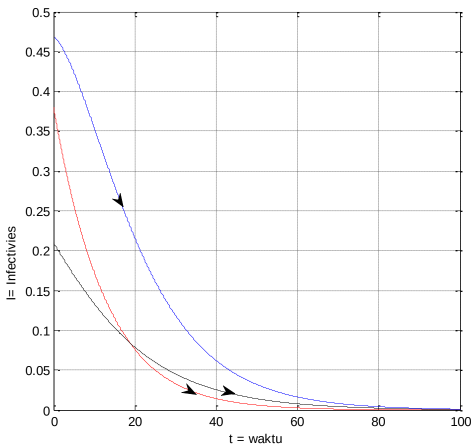
Berikut ini diberikan ilustrasi perilaku dari kelompok populasi individu yang rentan (*susceptibles*) dan kelompok individu yang terinfeksi (*infectivies*) dalam ukuran proporsi.

Lebih lanjut diambil nilai-nilai parameter yang disesuaikan dengan $R_0 = \frac{\text{â}N}{\text{á}}$ yaitu : $\text{â} = 0.65$ dan $\text{á} = 0.30$. Dengan demikian diberikan grafik penyelesaian $S(t)$ yang menyatakan kepadatan populasi dari individu yang rentan (*susceptible*) terhadap waktu.



Gambar 2. Grafik Penyelesaian $S(t)$

Dari gambar di atas terlihat bahwa untuk setiap pemberian nilai awal yang berbeda maka grafik solusi akan menuju ke posisi stabil pada saat $t = 40$. Karena titik ekuilibrium yang diselidiki nonhiperbolik, maka grafik solusi tidak menuju atau konvergen ke satu titik. Dalam hal ini dapat diartikan bahwa populasi yang rentan akan selalu ada di dalam kelompok populasi dan akan mencapai ke kapasitas batasnya. Berikut ini diberikan grafik penyelesaian $I(t)$ yang menyatakan kepadatan populasi dari individu yang terinfeksi (*infectivies*) terhadap waktu.



Gambar 3. Grafik Penyelesaian $I(t)$

Dari gambar di atas terlihat bahwa untuk setiap pemberian nilai awal yang berbeda maka grafik solusi akan menuju atau konvergen ke titik nol pada saat $t = 100$. Hal ini menandakan di awal waktu, terdapat sekelompok populasi yang terinfeksi penyakit namun pada waktu $t = 100$, berangsur-angsur penyakit tersebut hilang dari populasi.

5. PENUTUP

Pada penelitian ini, penulis hanya meneliti untuk penularan penyakit tidak fatal model epidemiologi tipe-SIR tanpa kelahiran dan kematian. Maka dari itu kedepannya perlu penelitian lebih lanjut untuk penyakit yang fatal model epidemiologi tipe-SIR dengan adanya kelahiran dan kematian. Kemudian perlu adanya pengembangan lebih lanjut untuk kasus-kasus model lain seperti model epidemiologi tipe-SEIR, SIRS, SEIRS, SI, SIS, SEIS dan dapat diaplikasikan untuk kasus penyakit menular lain seperti tubercolosis, AIDS, hepatitis, demam berdarah, malaria dan campak.

Dari penjelasan di bagian analisis pembahasan dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit adalah suatu kondisi dimana sudah tidak ada lagi penyakit yang menyerang atau dalam artian tidak ada lagi individu yang terserang penyakit. Sedangkan untuk titik ekuilibrium endemik yaitu suatu kondisi dimana penyakit selalu ada di dalam populasi tersebut, artinya adalah selalu saja ada individu yang terserang penyakit.

Daftar Pustaka

Diekmann, O & Heesterbeek, J.A.P. 2000. *Mathematical Epidemiology Of Infectoius Deseases: Model Building, Analysis and Interpretation.* NewYork: John Willey.

Finizio,N., & Ladas,G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern.* Jakarta: Erlangga.

Howard, A. 1995. *Aljabar Linear Elementer edisi kelima*. Jakarta: Erlangga.

Lawrence, P. 1991. *Differential Equation And Dynamical System.* Berlin: Springer Verlag.

Maki, P. Daniel dan Thompson, M. 1973. *Mathematical Model and Applications.* New Jersey: Prentice Hall

Meyer, Walter J. 1984. *Concept Of Mathematical Modelling*. NewYork: McGraw-Hill Book Company.

Olders, G.J and Vonder Woude, J.W. 1994. *Mathematical System Theory. First Edition*. Netherland: Delftse Witgevers Maatschappij.