MODEL STOKASTIK PERTUMBUHAN POPULASI (PURE BIRTH PROCESS)

Surya Amami Pramuditya[1], Tonah[2]
[1,2]Pendidikan Matematika FKIP Universitas Swadaya Gunung Jati Cirebon
amamisurya@fkip-unswagati.ac.id

Abstrak

Jumlah populasi bakteri pada waktu t secara hipotetik (pure birth proccess) dapat diperoleh dengan menggunakan model eksponensial dengan sejumlah asumsi yang mendasarinya ditentukan secara deterministik yang bersifat pasti. Sementara di alam hal ini tentu tidak realistik karena banyak mengandung ketakpastian. Model ini tentu saja belum dapat mengakomodasi berapa besar peluang bahwa jumlah individu bakteri pada waktu t bernilai tertentu. Oleh karena itu, dalam peneltian ini akan memformulasikan suatu model kelahiran stokastik yaitu peluang bahwa jumlah populasi pada waktu t dengan jumlah individu di populasi awal sama dengan suatu nilai tertentu.

Kata Kunci: Populasi, Model Eskponensial, Peluang Stokastik

1. PENDAHULUAN

Dalam kehidupan ini, terdapat dua kejadian yang dapat dimodelkan secara matematika yaitu kejadian deterministik dan kejadian stokastik. Kejadian deterministik adalah kejadian yang sudah pasti terjadi, sedangkan kejadian stokastik merupakan kejadian yang belum pasti (mungkin dapat) terjadi dan bersifat peluang.

Pertumbuhan populasi dialami oleh setiap makhluk hidup dan ditandai dengan adanya perubahan dari waktu kewaktu, dimulai dari adanya kelahiran,perkembangan, hingga kematian. Pertumbuhan suatu populasi, dapat digambarkan oleh model matematika salah satunya adalah model eksponensial yang merupakan model deterministik.

Model pertumbuhan populasi bakteri sedikit memberikan gambaran tentang dinamika populasi. Bakteri tanah daerah perakaran yaitu Pantoea agglomerans merupakan salah satu bakteri yang tahan pada daerah kering dan mengandung kadar garam yang cukup tinggi. Pertumbuhan populasi bakteri ini dapat dimodelkan dengan model deterministik eksponensial (Sulaiman dan Permana, 2015).

Model determisitik maupun stokastik mempunyai tujuan yang sama yaitu memprediksi pertumbuhan populasi bakteri, hanya saja model stokastik mempunyai kelebihan memberikan angka peluang terhadap hasil prediksi yang diperoleh. Oleh karena itu, penulis termotivasi untuk mengkaji lebih lanjut tentang masalah pertumbuhan populasi bakteri Pantoea agglomerans ini secara stokastik.

2. KAJIAN PUSTAKA

2.1. Model Eksponensial

Pertumbuhan bakteri pada populasi hipotetik (pure birth proccess) yang berasal dari beberapa individu dan pada populasi awal (N_0) diamati selama 40 jam, masing-masing individu (sel) bakteri setiap jam berkembang biak menjadi dua, sehingga selanjutnya menjadi beberapa individu bakteri. Dengan melambangkan :

N_0 =banyak populasi bakteri pada saat pengamatan dimulai (periode awal $t = 0$).

N_t =banyak populasi pada waktu ke- t.

Model pertumbuhan bakteri ini dapat dinyatakan dalam persamaan :

$$N_t = (2^t)N_0 \quad (1)$$

Model pertumbuhan (1) disusun berdasarkan beberapa asumsi (Sulaiman dan Permana, 2015) yaitu :

1. Nutrien bagi bakteri tersedia dalam jumlah yang cukup.
2. Ruangan hidup selalu mencukupi untuk perkembangbiakan.
3. Keadaan lingkungan seperti suhu dan kelembapan dalam keadaan konstan.
4. Bakteri berkembangbiak teratur setiap jam, sehingga tidak terjadi senjang waktu (*time lag*) bagi mikroorganisme untuk membelah, misalnya karena belum cukup dewasa atau belum waktunya untuk bereproduksi.
5. Kematian dalam populasi tidak terjadi sehingga populasi dari waktu ke waktu terus meningkat.

Sehingga model **(1)** dapat dinyatakan sebagai :

$$N_t = ë^t N_0 \qquad (2)$$

Lebih lanjut jika digunakan bilangan euler (e = 2,71828 …) maka dapat ditulis persamaan $ë = e^r$ dengan $r = \ln ë$. Jika $ë = e^r = 2$ maka $r = \ln ë = 0{,}683$. Sehingga model **(2)** dapat dirumuskan menjadi :

$$N_t = (e^r)^t N_0$$

atau

$\ln N_t = \ln N_0 + rt.$

Persamaan ini adalah persamaan garis lurus yang memiliki kemiringan r dan intersep $N(0)$. Jika nilai $N(t)$ dinyatakan dengan $N(t_1)$ dan $N(t_2)$, maka r dapat dinyatakan sebagai :

$$r = \frac{\ln N(t_2) - \ln N(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Sehingga untuk pertumbuhan mikroorganisme di Persamaan **(2)** dapat dirumuskan :

$N_t = (e^r)^t N_0$

atau secara umum

$$N_t = (e^{rt}) N_0 \qquad (3)$$

Berdasarkan asumsi di atas laju pertumbuhan populasi r adalah konstan. Lebih lanjut diperoleh model eksponensial yang lain yaitu :

$$\frac{dN(t)}{N(t)dt} = r\ . \qquad (4)$$

Ruas kiri dari persamaan di atas diartikan sebagai laju pertumbuhan perkapita, sehingga persamaan di atas dapat ditulis sebagai :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \qquad (5)$$

Hal ini berarti laju pertumbuhan populasi pada waktu t sebanding atau berbanding lurus dengan ukuran populasi pada waktu t. Sedangkan r merupakan konstanta kesebandingan (Boyce dan DiPrima, 2008). Persamaan **(5)** adalah persamaan diferensial orde pertama, sedangkan solusi persamaan diferensial ini adalah Persamaan **(3)**, dengan kata lain Persamaan **(3)** merupakan bentuk integral dari Persamaan **(5)**.

2.2. Distribusi Peluang Peubah Acak

Menurut Casella dan Berger (1990) peubah acak X merupakan suatu fungsi dari ruang sampel S ke suatu bilangan real. Terdapat dua jenis peubah acak: pertama, peubah acak diskrit yang dapat dicacah dengan banyaknya elemen berhingga atau tak berhingga; kedua, peubah acak kontinu yang dihasilkan dari ruang sampel kontinu. Setiap peubah acak X memiliki fungsi distribusi peluang yang dikenal dengan fungsi massa peluang (FMP) untuk peubah acak diskrit dan fungsi kepadatan peluang (FKP) untuk peubah acak kontinu.

Casella dan Berger (1990) mendefinisikan fungsi massa peluang dari peubah acak diskrit X dengan

$$p(x) = P(X = x) \text{ untuk semua } x \quad (6)$$

dan fungsi distribusi kumulatif untuk peubah acak X didefinisikan sebagai

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_t \leq x} p(x_t). \quad (7)$$

Nilai ekspektasi dan variansi dari suatu peubah acak secara berturut-turut dinotasikan dengan E(X) dan Var(X) didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_{x \in X} x f_X(x) \, , jika \ X \ peubah \ acak \ diskrit \quad (8)$$

dan

$$Var(X) = \sum_{x \in X} \big(x - E(X)\big)^2 p(x) \quad (9)$$

Nilai ekspektasi dan variansi dari peubah acak X memiliki beberapa sifat yang tercakup dalam teorema-teorema berikut:

Teorema 1. Misalkan X sebuah peubah acak dan misalkan a, b, dan merupakan konstanta. Jika g_1(X)dan g_2(X) merupakan fungsi-fungsi dari peubah acak X maka

a. $E\big(ag_1(X) + bg_2(X)\big) = aE\big(g_1(X)\big) + bE(g_1(X))$

b. Jika $g_1(X) \geq 0$ untuk semua x, maka $E\left(g_1(X)\right) \geq 0$

c. Jika $g_1(X) \geq g_2(X)$ untuk semua x, maka $E\left(g_1(X)\right) \geq E\left(g_2(X)\right)$

d. Jika $a \leq g_1(X) \leq b$ untuk semua x, maka $a \leq E(g_1(X)) \leq b$

Herrhyanto dan Gantini (2012) memaparkan beberapa teorema variansi.

Teorema 2. Misalkan X sebuah peubah acak dengan variansi yang berhingga maka untuk sembarang konstanta a dan b berlaku

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Teorema 3. Misalkan X sebuah peubah acak dengan nilai ekspektasi E(X) dan variansi Var(X) maka $\mathrm{Var(X)} = \mathrm{E(X^2)} - (\mathrm{E(X)})^2$.

Fenomena di kehidupan sering kali tidak cukup hanya dijelaskan oleh satu peubah acak saja namun sering kali perlu dijelaskan oleh banyak peubah acak (peubah ganda). Berkaitan dengan distribusi peluang pada dua peubah acak diskrit terdapat konsep dasar tentang fungsi peluang bersama, fungsi peluang marginal, fungsi peluang bersyarat dan kebebasan antar dua peubah acak.

Misalkan X dan Y merupakan dua peubah acak diskrit yang berasal dari ruang sampel yang sama. Fungsi peluang bersama dari X dan Y dinotasikan

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

dengan sifat-sifat sebagai berikut.

1. $p_{X,Y}(x, y) \geq 0, untuk\ \forall\ (x, y)$
2. $\sum\sum_{\forall(x,y)} p_{X,Y}(x, y) = 1.$

$\mathrm{p(A)}$ merupakan peluang bahwa $(\mathrm{x, y}) \in \mathrm{A}$ dengan $\mathrm{p(A)} = \sum\sum_{(\mathrm{x,y})\in \mathrm{A}} \mathrm{p(x, y)}$.

$$p_X(x) = \sum_{\forall y} p_{X,Y}(x, y), x \in \forall\Re \text{ dan } p_Y(y) = \sum_{\forall x} p_{X,Y}, y \in \forall\Re$$

merupakan fungsi peluang marginal dari X dan fungsi peluang marginal dari Y (Herrhyanto dan Gantini, 2012). Adapun fungsi peluang bersyarat dari Y jika diberikan X diformulasikan dengan

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} \qquad (10)$$

dengan sifat $\sum_{\forall y} p_{Y|X}(y|x) = 1$, dan fungsi peluang bersyarat dari X jika diberikan Y sebagai berikut:

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_y(y)} \qquad (11)$$

dengan sifat $\sum_{\forall x} p_{X|Y}(x|y) = 1$.

Peubah acak X dan Y dikatakan saling bebas apabila memenuhi kondisi $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \times p_Y(y), untuk\ \forall\ (x,y) \in (X,Y)$.

2.3. Proses Stokastik

Misalkan $\mathcal{T} = \mathbb{N}$. Keluarga peubah acak $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ dengan indeks disebut dengan proses stokastik waktu diskrit.

Proses stokastik $\{X_n\}$ merupakan Rantai Markov.

Peluang bersyarat $X_{n+1} = j$ jika diberikan keadaan lampau $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$ dan keadaan sekarang $X_n$hanya bergantung pada keadaan sekarang.

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = p(X_{n+1} = j|X_n = i\ ) = P_{ij} \ (12)$$

P_{ij} merupakan peluang bahwa proses akan berada dikeadaan j dari keadaan awal i. $P_{ij} \geq 0$, $i, j \geq 0$ dan $\sum_{j=0} P_{ij} = 1$.

Proses stokastik dapat direpresentasikan dengan sebuah matriks transisi P_{ij} berikut

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0} & p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$P(X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = p(X_{n+1} = j|X_n = i\ ) = P_{ij}$ disebut dengan peluang transisi satu langkah (Pramuditya, dkk., 2014).

Dengan menggunakan peluang bersyarat dapat dihitung peluang bersama

$$P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$

$$= P(X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$
$$\times P(X_n = i | X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$

$$= P(X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \times P(X_n = i | X_{n-1} = i_{n-1})$$

Proses ini terus berlanjut hingga diperoleh

$\mathrm{P}(\mathrm{X_n} = \mathrm{i}, \mathrm{X_{n-1}} = \mathrm{i_{n-1}}, \mathrm{X_{n-2}} = \mathrm{i_{n-2}}, \cdots, \mathrm{X_1} = \mathrm{i_1}, \mathrm{X_0} = \mathrm{i_0}) = \mathrm{p_{i0}} \cdots \mathrm{P_{i_{n-1}, i_n}}$. (13)

Peluang transisi n langkah dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan Chapman-Kolmorov yang dituliskan sebagai berikut

$\mathrm{P_{ij}^n} = \mathrm{P}(\mathrm{X_{n+k}} = \mathrm{j} | \mathrm{X_k} = \mathrm{i}),\ \mathrm{n} \geq 0,\ \mathrm{i}, \mathrm{j} \geq 0.$ (14)

Persamaan Chapman dan Kolmorov digunakan juga untuk menghitung peluang transisi n+m langkah.

$\mathrm{P_{ij}^{n+m}} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \mathrm{P_{ik}^n} \mathrm{P_{kj}^m}$ untuk semua n, m dan semua i, j. (15)

$\mathrm{P_{ik}^n} \mathrm{P_{kj}^m}$ merupakan peluang suatu proses dalam keadaan i akan berada di keadaan j dalam n+m langkah, melalui keadaan k dalam n langkah.

3. PEMBAHASAN

3.1. Model Stokastik *Pure Birth Process*

Misalkan peluang suatu bakteri berkembang biak dalam selang waktu "pendek" Δt sebanding dengan Δt (Taylor dan Karlin, 1998), sehingga dapat dibuat dalam persamaan:

$$\mathrm{P}[\text{bakteri berkembang biak dalam selang } \Delta\mathrm{t}] = \mathrm{b}\Delta\mathrm{t}, \mathrm{b} > 0$$

dengan b adalah konstanta (faktor) kesebandingan. Akibatnya

$$\mathrm{P}[\text{bakteri tidak berkembang biak dalam selang } \Delta\mathrm{t}] = 1 - \mathrm{b}\Delta\mathrm{t}$$

Misalkan terdapat $\mathrm{n} = 2$bakteri dalam populasi dan perkembangan biakan masing-masing bakteri saling bebas, maka

$$\mathrm{P}[\text{bakteri tidak berkembang biak dalam selang } \Delta\mathrm{t}] = (1 - \mathrm{b}\Delta\mathrm{t})^2 (16)$$

Karena Δt diasumsikan cukup kecil, maka$(\Delta t)^n$ untuk $n > 1$ dapat diabaikan sehingga

$$\text{P[bakteri tidak berkembang biak dalam selat } \Delta t] \approx 1 - 2b\Delta t$$

Apabila untuk Δt yang cukup kecil tersebut diasumsikan paling banyak hanya terdapat satu bakteri yang berkembang biak, maka

$$\text{P[satu bakteri berkembang biak dalam selang } \Delta t] = 2b\Delta t (17)$$

Dengan menggunakan analogi yang serupa, untuk populasi dengan nbakteri persamaan (6) dan persamaan (7) menjadi

P[bakteri tidak berkembang biak dalam selang Δt]

$= (1 - b\Delta t)^2 \approx 1 - nb\Delta t$ dan

P[satu bakteri berkembang biak dalam selang Δt] $= nb\Delta t$

Misalkan n_0 banyaknya bakteri pada saat $t = 0$ dan $N(t)$ banyaknya bakteri dalam populasi pada saat t, maka $N(0) = n_0$. Dengan mengasumsikan tidak ada bakteri yang musnah, akan ditentukan peluang banyaknya bakteri dalam populasi pada saat t, yaitu

$$P_n(t) = P[N(t) = n]$$

dengan $N(t) = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$.

Peluang banyak bakteri pada saat $t + \Delta t$ terdapat $n_0$bakteri dapat dituliskan dengan persamaan

$$P_{n_0}(t + \Delta t) = P_{n_0}(t).(1 - n_0 b\Delta t) \qquad (18)$$

dan diperoleh hubungan

$$P_{n_0+1}(t + \Delta t) = n_0 b\Delta t. P_{n_0}(t) + (1 - (n_0 + 1)b\Delta t). P_{n_0+1}(t) \qquad (19)$$

$$\vdots$$

$$P_{n_0+k}(t + \Delta t) = (n_0 + k - 1)b\Delta t. P_{n_0+k-1}(t) + (1 - (n_0 + k)b\Delta t). P_{n_0+k}(t) \; (20)$$

Pandang persamaan (18):

$$P_{n_0}(t + \Delta t) = P_{n_0}(t).(1 - n_0 b\Delta t)$$

$$\leftrightarrow P_{n_0}(t + \Delta t) - P_{n_0}(t) = -n_0 b\Delta t P_{n_0}(t)$$

$\leftrightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{n_0}(t+\Delta t) - P_{n_0}(t)}{\Delta t} = -n_0 b P_{n_0}(t)$

$\leftrightarrow P'_{n_0}(t) = -n_0 b P_{n_0}(t)$ (21)

$\leftrightarrow \frac{dP_{n_0}(t)}{dt} = -n_0 b P_{n_0}(t)$

$\leftrightarrow \int \frac{dP_{n_0}(t)}{P_{n_0}(t)} = \int -n_0 b.\, dt$

$\leftrightarrow \ln P_{n_0}(t) = -n_0 bt + C$

$\leftrightarrow P_{n_0}(t) = e^{-n_0 bt}.K$

Untuk $\mathrm{P_{n_0}(0) = 1}$, maka banyaknya bakteri sebanyak $\mathrm{n_0}$ pada saat $\mathrm{t = 0}$ adalah

$\mathrm{P_{n_0}(t) = e^{-n_0 bt}}$ (22)

Selanjutnya, pandang juga persamaan (19):

$P_{n_0+1}(t + \Delta t) = n_0 b \Delta t.\, P_{n_0}(t) + (1 - (n_0 + 1) b \Delta t).\, P_{n_0+1}(t)$

$\leftrightarrow P_{n_0+1}(t + \Delta t) - P_{n_0+1}(t) = n_0 b \Delta t.\, e^{-n_0 bt} - (n_0 + 1) b \Delta t P_{n_0+1}(t)$

$\leftrightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{n_0+1}(t+\Delta t) - P_{n_0+1}(t)}{\Delta t} = n_0 b.\, e^{-n_0 bt} - (n_0 + 1) b P_{n_0+1}(t)$

$\leftrightarrow P'_{n_0+1}(t) = n_0 b.\, e^{-n_0 bt} - (n_0 + 1) b P_{n_0+1}(t)$ **(23)**

$\leftrightarrow P'_{n_0+1}(t) + (n_0 + 1) b P_{n_0+1}(t) = n_0 b.\, e^{-n_0 bt}$

$\leftrightarrow e^{\int (n_0+1) b.dt} P'_{n_0+1}(t + \Delta t) + e^{\int (n_0+1) b.dt} (n_0 + 1) b P_{n_0+1}(t) = e^{\int (n_0+1) b.dt} n_0 b.\, e^{-n_0 bt}$

$\leftrightarrow \frac{d\left[e^{\int (n_0+1) b.dt} P_{n_0+1}(t)\right]}{dt} = e^{\int (n_0+1) b.dt} n_0 b.\, e^{-n_0 bt}$

$\leftrightarrow \int d\left[e^{\int (n_0+1) b.dt} P_{n_0+1}(t)\right] = \int e^{(n_0+1) bt} n_0 b.\, e^{-n_0 bt}.\, dt$

$\leftrightarrow e^{(n_0+1) bt} P_{n_0+1}(t) = \int n_0 b.\, e^{bt}.\, dt$

$\leftrightarrow C + e^{(n_0+1) bt} P_{n_0+1}(t) = \frac{n_0 b}{b}.\, e^{bt}$

dengan $\mathrm{P_{n_0+1}(0) = 0}$ diperoleh $\mathrm{C = n_0}$

$$P_{n_0+1}(t) = \left(n_0 e^{bt} - n_0\right) e^{-(n_0+1) bt}$$

Jadi, peluang bakteri sebanyak $\mathrm{n_0 + 1}$padasaat t adalah

$$P_{n_0+1}(t) = n_0 e^{-n_0 bt}\left(1 - e^{-bt}\right) \quad (24)$$

3.2. Peluang Bakteri Sebanyak *n* pada Saat *t*

Selanjutnya, klaim bahwa peluang bakteri sebanyak n pada saat t adalah

$$P_n(t) = \binom{n-1}{n_0-1} e^{-n_0bt}\left(1-e^{-bt}\right)^{n-n_0}, \quad n \geq n_0$$

Maka, dengan induksi matematika akan dibuktikan bahwa $\mathrm{P_n(t)}$ benar.

(i) Misalkan $n = n_0$, akan dibuktikan $P_{n_0}(t)$ benar.

$$P_{n_0}(t) = \binom{n_0-1}{n_0-1} e^{-n_0bt}\left(1-e^{-bt}\right)^{n_0-n_0} = e^{-n_0bt}$$

Berdasarkan persamaan**(22)**, terbukti bahwa $P_{n_0}(t)$ benar.

(ii) Misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $P_k(t)$ benar.

$$P_k(t) = \binom{k-1}{n_0-1} e^{-n_0bt}\left(1-e^{-bt}\right)^{k-n_0}$$

Akan dibuktikan untuk $n = k+1$, yaitu $P_{k+1}(t)$ benar.

Pandang persamaan (13), dengan$n_0 = k$ diperoleh

$P'_{k+1}(t) = kb.P_k(t) - (k+1)bP_{k+1}(t)$

$\leftrightarrow P'_{k+1}(t) + (k+1)bP_{k+1}(t) = kb.P_k(t)$

$\leftrightarrow P'_{k+1}(t) + (k+1)bP_{k+1}(t) = kb.\binom{k-1}{n_0-1} e^{-n_0bt}(1-e^{-bt})^{k-n_0}$(25)

Dengan menggunakan solusi faktor integrasi dan mengambil $v = \int e^{(k+1)bt}$, kalikan persamaan **(25)** dengan v diperoleh

$$\int e^{(k+1)bt} P'_{k+1}(t) + \int e^{(k+1)bt} (k+1)bP_{k+1}(t)$$

$$= \int e^{(k+1)bt} kb.\binom{k-1}{n_0-1} e^{-n_0bt}\left(1-e^{-bt}\right)^{k-n_0}$$

$\leftrightarrow \frac{d[e^{(k+1)bt}P_{k+1}(t)]}{dt} = kb.\binom{k-1}{n_0-1} e^{(k+1)bt}e^{-n_0bt}(1-e^{-bt})^{k-n_0}$

$\leftrightarrow \frac{d[e^{(k+1)bt}P_{k+1}(t)]}{dt} = kb.\binom{k-1}{n_0-1} e^{bt}(e^{bt}-1)^{k-n_0}$

$\leftrightarrow \int d\left[e^{(k+1)bt}P_{k+1}(t)\right] = \int \left[kb.\binom{k-1}{n_0-1} e^{bt}(e^{bt}-1)^{k-n_0}\right] dt$

$\leftrightarrow e^{(k+1)bt}P_{k+1}(t) = \frac{kb}{b(k+1-n_0)}.\binom{k-1}{n_0-1} (e^{bt}-1)^{k+1-n_0}$

$\leftrightarrow e^{(k+1)bt}P_{k+1}(t) = \frac{k}{k+1-n_0}.\binom{k-1}{n_0-1} (1-e^{-bt})^{k+1-n_0}e^{(k+1-n_0)bt}$

$\leftrightarrow P_{k+1}(t) = \frac{k}{k+1-n_0}.\binom{k-1}{n_0-1} e^{-n_0bt}(1-e^{-bt})^{k+1-n_0}$

$\leftrightarrow P_{k+1}(t) = \frac{k}{k+1-n_0}.\frac{(k-1)!}{(k-n_0)!(n_0-1)!}.e^{-n_0bt}(1-e^{-bt})^{k+1-n_0}$

$\leftrightarrow P_{k+1}(t) = \frac{k!}{(k+1-n_0)!(n_0-1)!}.e^{-n_0bt}(1-e^{-bt})^{k+1-n_0}$

$\leftrightarrow P_{k+1}(t) = \binom{k+1-1}{n_0-1}.e^{-n_0bt}(1-e^{-bt})^{k+1-n_0}$

Sehingga, terbukti bahwa $P_{k+1}(t)$ benar.

Jadi, peluang bakteri sebanyak n pada saat t adalah

$$P_n(t) = \binom{n-1}{n_0-1} e^{-n_0bt}\left(1-e^{-bt}\right)^{n-n_0}, \quad n \geq n_0 \qquad (26)$$

3.3. Pembuktian Polinomial Negatif

Akan dibuktikan $P_n(t) = \binom{n-1}{n_0-1} e^{-n_0bt}\left(1-e^{-bt}\right)^{n-n_0}, n \geq n_0$

Adalah fungsi massa peluang dari polinom negatif yaitu

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \binom{n-1}{n_0-1} e^{-n_0bt}\left(1-e^{-bt}\right)^{n-n_0} = 1$$

Misal $m = n - n_0$ maka $n = m + n_0$,

jika $n = n_0$ maka $m = 0$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \binom{n-1}{n_0-1} e^{-n_0bt}\left(1-e^{-bt}\right)^{n-n_0}$$

$$= e^{-n_0bt} \sum_{n=n_0}^{\infty} \binom{n-1}{n_0-1} (1-e^{-bt})^{n-n_0}$$

$$= e^{-n_0bt} \textstyle\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n_0-1}{n_0-1} (1-e^{-bt})^{m} \qquad (27)$$

Pandang

$$\binom{m+n_0-1}{n_0-1} = \frac{(m+n_0-1)!}{(n_0-1)!(m)!} = \binom{m+n_0-1}{m}$$

$$= \frac{(m+n_0-1)(m+n_0-2)\cdots(n_0-1)!}{(n_0-1)!(m)!}$$

$$= \frac{n_0(n_0+1)\cdots(m+n_0-1)}{m!}$$

kemudian pandang

$$\binom{-n_0}{m} = \frac{(-n_0)(-n_0-1)\cdots(-n_0-m+1)(-n_0-m)!}{(-n_0-m)!m!}$$

$$= (-1)^m \binom{m+n_0-1}{m}$$

untuk **(27)**

$$e^{-n_0bt}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+n_0-1}{n_0-1}\left(1-e^{-bt}\right)^m = e^{-n_0bt}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{-n_0}{m}\left(1-e^{-bt}\right)^m$$

$$= e^{-n_0bt}\textstyle\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{-n_0}{m}(1-e^{-bt})^m$$

$$= e^{-n_0bt}\textstyle\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-n_0}{m}(-1+e^{-bt})^m$$

$$= e^{-n_0bt}\textstyle\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-n_0}{m}(1)^{-n_0-m}(-1+e^{-bt})^m$$

Dengan menggunakan Teorema Binomial Newton dapat diperoleh

$$= e^{-n_0bt}(1-1+e^{-bt})^{-n_0}$$

$$= e^{-n_0bt}e^{n_0bt}$$

$$= 1.$$

Terbukti bahwa $\sum_{n=n_0}^{\infty}\binom{n-1}{n_0-1}e^{-n_0bt}\left(1-e^{-bt}\right)^{n-n_0} = 1$, dengan kata lain

$P_n(t) = \binom{n-1}{n_0-1}e^{-n_0bt}\left(1-e^{-bt}\right)^{n-n_0}, n \geq n_0$ merupakan fungsi massa peluang.

3.4. Hubungan Model Deterministik dan Model Stokastik

Misalkan $N(t)$ adalah peubah acak yang menyatakan banyaknya bakteri pada saat t, sehingga ekspektasi (nilai harapan) dari peubah acak tesebut adalah

$$E[N(t)] = m(t) = \textstyle\sum_{n=n_0}^{\infty} nP_n(t) \qquad (28)$$

Dari persamaan **(28)** dapat diperoleh

$$m'(t) = \sum_{n=n_0}^{\infty} nP'_n(t)$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} n(n-1)bP_{n-1}(t) - n^2bP_n(t)$$

$$= b\sum_{n=n_0}^{\infty} nP_n(t)$$

$$= bm(t).$$

Karena $P_{n_0}(0) = 1$, maka $m(0) = n_0$. Dengan menggunakan solusi persamaan diferensial metode pemisah variabel, diperoleh

$$m(t) = n_0e^{bt} \qquad (29)$$

Dari model deterministik eksponensial, dengan asumsi tidak ada kepunahan bakteri, kita peroleh persamaan **(3)** yang bersesuaian dengan model stokastik *pure birth process* persamaan **(29)**.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Pertumbuhan populasi bakteri *Pantoea agglomerans* sebanyak n_0 pada saat t secara stokastik memiliki model persamaan
$$P_{n_0}(t) = e^{-n_0 bt}$$
2. Pertumbuhan populasi bakteri *Pantoea agglomerans* sebanyak n pada saat t jika diketahui banyak populasi awal n_0 secara stokastik memiliki model persamaan
$$P_n(t) = \binom{n-1}{n_0-1} e^{-n_0 bt}\left(1 - e^{-bt}\right)^{n-n_0}, \quad n \geq n_0$$
dengan parameter ekspektasi
$$m(t) = n_0 e^{bt}$$

4.2. Saran

Beberapa hal yang dapat dilakukan untuk penelitian selanjutnya adalah:

1. diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat mencari momen kedua untuk penetuan parameter kedua yaitu variansi.
2. diharapkan dapat ditemukan pula model stokastik untuk model deterministik logistik.

Daftar Pustaka

Boyce, W.E., DiPrima, R.C. (2008). *Elementary Equations and Boundary Value Problem 9th Edition*. New York: Willey.

Casella, G., Berger, R.L. (1990). *Statistical Inference. International Student Edition*. California: Brooks/Cole Publishing Company.

Herrhyanto, N., Gantini, T. (2012). *Pengantar Statistika Matematis*. Bandung : Yrama Widya.

Pramuditya, S. A., Marwati, R., & Puspita, E. (2014). Peramalan Pangsa Pasar Kartu GSM dengan Pendekatan Rantai Markov. *Euclid Jurnal* 1(2).

Sulaiman, H.,Permana, D. (2016). Kajian Model Matematika Eksponensial Dan Logistic Dengan Contoh Aplikasinya Pada Pertumbuhan Populasi Bakteri *Pantoea Agglomerans*di Medium Luria Bertani Cair Sistem *Batch Culture. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika* Hal. 685-700. Cirebon: Pendidikan Matematika FKIP Unswagati.

Taylor, H.M., Karlin, S. (1998). *An Introduction to Stochastic Modelling 3rd Edition.* London: Academic Press.