ANALISIS SISA PEMBAGIAN DARI $\sum_{i=1}^n (7i)^m$

Rika Pratiwi¹⁾, Mashadi²⁾, Sri Gemawati³⁾

¹⁾Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; rikapratiwi04@gmail.com

²⁾Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; mashadi.mat@gmail.com

³⁾Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; gemawati.sri@gmail.com

Abstrak

Keterbagian dari penjumlahan berhingga bilangan berpangkat seperti $\sum_{i=1}^n (2i)^m$, $\sum_{i=1}^n (2i-1)^m$, $\sum_{i=1}^n (3i)^m$, $\sum_{k=1}^n (4k)^m$, dan $\sum_{k=1}^n (5k)^m$ telah dikembangkan oleh beberapa penulis di berbagai buku dan artikel. Dalam artikel ini akan dibahas sisa pembagian dari $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ oleh pembagi 3 dan 5 dengan menggunakan konsep keterbagian serta memformulasikannya berdasarkan sisa pembagian yang didaftarkan dalam bentuk tabel, dan pada bagian akhir diperoleh hasil bahwa $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ kombinasi linear dari $\sum_{i=1}^n (3i)^m$ dan $\sum_{i=1}^n (5i)^m$.

Kata kunci: Penjumlahan bilangan bulat berpangkat, Keterbagian bilangan, Kombinasi linear.

Abstract

The division of finite sums of powers of integers such as $\sum_{i=1}^n (2i)^m$, $\sum_{i=1}^n (2i-1)^m$, $\sum_{i=1}^n (3i)^m$, $\sum_{k=1}^n (4k)^m$, and $\sum_{k=1}^n (5k)^m$ has been developed by several authors in various books and articles. In this article will discuss about residual division of $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ by divisors 3 and 5 by using the concept of divisibility and formulating it based on residual division that are listed into table, and at the end obtained results that $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ linear combination of $\sum_{i=1}^n (3i)^m$ and $\sum_{i=1}^n (5i)^m$.

Keywords: Sums of powers of integers, Divisibility of numbers, Linear combination.

1. Pendahuluan

Keterbagian (*divisibility*) merupakan dasar pengembangan teori bilangan, sehingga konsep-konsep keterbagian akan banyak digunakan didalam sebagian besar uraian atau penjelasan matematis tentang pembuktian

teorema. Keadaan inilah yang memberikan gagasan tentang perlunya keterbagian. Keterbagian atau *divisibility* adalah sudut pandang matematika yang mempelajari suatu bilangan yang habis dibagi oleh bilangan lain.

Goldberg (2010) dan Mashadi dan Hadi (2017) menyatakan bahwa barisan bilangan real adalah fungsi pada himpunan bilangan asli N dengan daerah jelajah termuat di dalam himpunan bilangan real. Dalam buku Kemendikbud (2013) Barisan aritmatika adalah barisan bilangan yang beda setiap dua suku yang berurutan adalah sama dan barisan geometri adalah barisan bilangan yang nilai pembanding (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.

Algoritma pembagian telah dibahas dalam beberapa buku antara lain Baker (1984), Burton (2010), Koshy (2007), Niven I (1991) menyatakan bahwa algoritma pembagian sebagai berikut:

Teorema 1 (Algoritma Pembagian). Diberikan bilangan bulat a dan b , dengan $b > 0$, terdapat tepat satu bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga $a = qb + r$ dimana $0 \leq r < b$. Bilangan bulat q disebut hasil pembagian dan r disebut sisa pembagian.

Kekongruenan telah dibahas dalam beberapa buku antara lain Burton (2010), Clark (2003), dan Stark (1998) menyatakan defenisi kekongruenan sebagai berikut:

Definisi 1 (Kekongruenan). Dua bilangan bulat a dan b dikatakan kongruen modulo n , disimbolkan dengan $a \equiv b \pmod{n}$ jika n membagi habis $(a - b)$, artinya jika $a - b = kn$ untuk beberapa bilangan bulat k .

Keterbagian dari penjumlahan berhingga bilangan berpangkat telah dibahas dalam beberapa artikel antara lain Gulliver (2010) menyatakan keterbagian $\sum_{i=1}^n (2i)^m$ oleh pembagi 3 dan 5 dengan cara mendaftarkan sisa pembagian ke dalam bentuk tabel dengan $m = 1,2,3,\dots,12$ dan $n = 1,2,3,\dots,10$. Dari tabel tersebut dapat ditentukan pola sisa pembagian untuk m dan n berikutnya sehingga dapat ditentukan karakteristik keterbagian.

Gulliver (2010) menyatakan keterbagian $\sum_{i=1}^n (2i - 1)^m$ oleh pembagi 10, 3, dan 5 dengan cara mendaftarkan sisa pembagian ke dalam bentuk tabel

dengan $m = 1,2,3,\dots,12$ dan $n = 1,2,3,\dots,12$. Dari tabel tersebut dapat ditentukan pola sisa pembagian untuk m dan n berikutnya sehingga dapat ditentukan karakteristik keterbagian.

Gulliver (2012) menyatakan keterbagian $\sum_{i=1}^n (3i)^m$ oleh pembagi 4 dan 5 dengan cara mendaftarkan sisa pembagian ke dalam bentuk tabel dengan $m = 1,2,3,\dots,12$ dan $n = 1,2,3,\dots,15$. Dari tabel tersebut dapat ditentukan pola sisa pembagian untuk m dan n berikutnya sehingga dapat ditentukan karakteristik keterbagian [8].

Suprijanto dan Rusliansyah (2014) menyatakan keterbagian $\sum_{k=1}^n (4k)^m$ oleh pembagi 10, 5, dan 3 dalam dua kasus, yaitu kasus m tetap dan n tetap. Untuk kasus n tetap, sisa pembagian didaftarkan ke dalam bentuk tabel dengan $m = 1,2,3,\dots,12$ dan $n = 1,2,3,\dots,10$. Dari tabel tersebut dapat ditentukan pola sisa pembagian untuk m dan n berikutnya sehingga dapat ditentukan karakteristik keterbagian tersebut. Untuk kasus n tetap, ditentukan beberapa keterbagian untuk nilai m tertentu.

Suprijanto (2015) Keterbagian $\sum_{k=1}^n (5k)^m$ oleh pembagi 10 dan 3 dalam dua kasus, yaitu kasus m tetap dan n tetap. Untuk kasus n tetap, sisa pembagian didaftarkan ke dalam bentuk tabel dengan $m = 1,2,3,\dots,10$ dan $n = 1,2,3,\dots,10$. Dari tabel tersebut dapat ditentukan pola sisa pembagian untuk m dan n berikutnya sehingga dapat ditentukan karakteristik keterbagian tersebut. Untuk kasus n tetap, ditentukan beberapa keterbagian untuk nilai m tertentu.

Banyak bentuk keterbagian lainnya yang ditentukan secara mudah untuk nilai n atau m tetap dengan melihat jumlah modulo setiap bilangan atau dengan menentukan bentuk rumus paling mendekati untuk nilai m tetap. Selain itu, bisa menghitung $\sum_{i=1}^n (pi)^m$ untuk p lebih besar dari tiga [8].

Dalam artikel ini akan dibahas sisa pembagian dari $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ oleh pembagi 3 dan 5 dengan menggunakan konsep keterbagian serta memformulasikannya berdasarkan sisa pembagian yang didaftarkan dalam bentuk tabel, dan pada bagian akhir dengan menggunakan konsep kombinasi linear dalam buku [2,9] akan ditunjukkan dengan cara sederhana bahwa $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ kombinasi linear dari $\sum_{i=1}^n (3i)^m$ dan $\sum_{i=1}^n (5i)^m$.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini berbentuk studi literatur dengan mempelajari buku teks dan artikel yang berkaitan dengan masalah ini. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan kelas modulo untuk setiap pembagi 3 dan 5.
2. Menganalisis sisa pembagian $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ oleh pembagi 3 dan 5 dengan menggunakan Teorema Algoritma Pembagian.
3. Mendaftarkan sisa pembagian dari masing-masing pembagi ke dalam bentuk tabel.
4. Menentukan karakteristik keterbagian $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ oleh pembagi 3 dan 5 untuk setiap n .
5. Menunjukkan $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ kombinasi linear dari $\sum_{i=1}^n (3i)^m$ dan $\sum_{i=1}^n (5i)^m$.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada tahap awal akan ditentukan sisa pembagian dari $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ untuk $m = 1$ oleh pembagi 3 secara matematika berdasarkan Teorema 1. Dengan menggunakan rumus $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ maka $\sum_{i=1}^n 7i$ dapat dinyatakan dengan $\sum_{i=1}^n 7i = \frac{7n(n+1)}{2}$. Sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 3 berada pada kelas modulo 6 karena $\frac{7n(n+1)}{2} : 3 = \frac{7n(n+1)}{6}$ sehingga nilai n yang memungkinkan untuk membagi yaitu $6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4,$ dan $6k + 5$ dengan $k \geq 0, n \in \mathbb{Z}^+$. Kemudian nilai n tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan $\sum_{i=1}^n 7i = \frac{7n(n+1)}{2}$ sehingga diperoleh sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 3 seperti terlihat dalam uraian berikut:

Sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 3 untuk $n = 6k$ sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^n 7i = \frac{7n(n+1)}{2} = \frac{7 \cdot 6k(6k+1)}{2} = 7 \cdot 3k(6k+1) = 3 \cdot 7k(6k+1) = 3K$$

Sehingga $\sum_{i=1}^n 7i$ habis dibagi 3 untuk $n = 6k$.

Sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 3 untuk $n = 6k + 1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 7i &= \frac{7n(n+1)}{2} = \frac{7(6k+1)(6k+2)}{2} = 7(6k+1)(3k+1) = 7(18k^2 + 9k + 1) \\ &= 126k^2 + 63k + 7 = 3(42k^2 + 21k + 2) + 1 = 3K + 1 \end{aligned}$$

Sehingga sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 3 untuk $n = 6k + 1$ adalah 1.

Sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 3 untuk $n = 6k + 2$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 7i &= \frac{7n(n+1)}{2} = \frac{7(6k+2)(6k+3)}{2} = 7(3k+1)(6k+3) \\ &= 3 \cdot 7(3k+1)(2k+1) = 3K \end{aligned}$$

Sehingga $\sum_{i=1}^n 7i$ habis dibagi 3 untuk $n = 6k$.

Sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 3 untuk $n = 6k + 3, 6k + 4,$ dan $6k + 5$ dapat diperoleh dengan cara yang sama sehingga diperoleh $3 \mid \sum_{i=1}^n 7i$ untuk $n = 6k, 6k + 2, 6k + 3,$ dan $6k + 5$ dengan $k \geq 0$.

Pada tahap berikutnya akan ditentukan sisa pembagian dari $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ untuk $m = 1$ oleh pembagi 5 secara matematika berdasarkan Teorema 1. Sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 5 berada pada kelas modulo 10 karena $\frac{7n(n+1)}{2} : 5 = \frac{7n(n+1)}{10}$ sehingga nilai n yang memungkinkan untuk membagi yaitu $10k, 10k + 1, 10k + 2, 10k + 3, 10k + 4, 10k + 5, 10k + 6, 10k + 7, 10k + 8,$ dan $10k + 9$ dengan $k \geq 0, n \in \mathbb{Z}^+$. Kemudian nilai n tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan $\sum_{i=1}^n 7i = \frac{7n(n+1)}{2}$ sehingga diperoleh sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 5 seperti terlihat dalam uraian berikut:

Sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 5 untuk $n = 10k$ sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^n 7i = \frac{7n(n+1)}{2} = \frac{7 \cdot 10k(10k+1)}{2} = 7 \cdot 5k(10k+1) = 5 \cdot 7k(10k+1) = 5K$$

Sehingga $\sum_{i=1}^n 7i$ habis dibagi 5 untuk $n = 10k$.

Sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 5 untuk $n = 10k + 1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 7i &= \frac{7n(n+1)}{2} = \frac{7(10k+1)(10k+2)}{2} = 7(10k+1)(5k+1) \\ &= 7(50k^2 + 15k + 1) = 350k^2 + 105k + 7 = 5(70k^2 + 21k + 1) + 2 \\ &= 5K + 2 \end{aligned}$$

Sehingga sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 5 untuk $n = 10k + 1$ adalah 2.

Sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 5 untuk $n = 10k + 2$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 7i &= \frac{7n(n+1)}{2} = \frac{7(10k+2)(10k+3)}{2} = 7(5k+1)(10k+3) \\ &= 7(50k^2 + 25k + 3) = 350k^2 + 175k + 21 = 5(70k^2 + 35k + 4) + 1 \\ &= 5K + 1 \end{aligned}$$

Sehingga sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 5 untuk $n = 10k + 2$ adalah 1.

Sisa pembagian $\sum_{i=1}^n 7i$ oleh pembagi 5 untuk $n = 10k + 3, 10k + 4, 10k + 5, \dots, 10k + 9$ dapat diperoleh dengan cara yang sama sehingga diperoleh $5 \mid \sum_{i=1}^n 7i$ untuk $n = 10k, 10k + 4, 10k + 5, \text{ dan } 10k + 9$ dengan $k \geq 0$.

Selanjutnya sisa pembagian yang telah diperoleh tersebut didaftarkan ke dalam Tabel 1. Tabel ini baik digunakan untuk pembelajaran sisa pembagian dari $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ oleh pembagi 3 dengan $m = 1, 2, 3, \dots, 10$.

Tabel 1. Sisa Pembagian dari $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ oleh pembagi 3

Pangkat <i>m</i>	Jumlah <i>n</i>														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	1	2	2	0	1	1	2	0	0	1	2	2	0	1	1
3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
4	1	2	2	0	1	1	2	0	0	1	2	2	0	1	1
5	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0
6	1	2	2	0	1	1	2	0	0	1	2	2	0	1	1
7	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0
8	1	2	2	0	1	1	3	0	0	1	2	2	0	1	1
9	1	0	0	1	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	0
10	1	2	2	0	1	1	3	0	0	1	2	2	0	1	1

Berdasarkan Tabel 1 tersebut dapat diformulasikan karakteristik keterbagian $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ oleh pembagi 3 untuk setiap n . Perhatikan bahwa kolom 8 dan 9 mempunyai angka terakhir 0. Jadi, untuk $n = 9r$ dan $9r - 1$ dengan $r \geq 1$ maka 3 dapat membagi barisan bilangan tersebut seperti dilambangkan sebagai berikut:

$$3 \mid \sum_{i=1}^n (7i)^m \text{ untuk } n = 9r \text{ dan } 9r - 1$$

Tabel 2 digunakan untuk pembelajaran sisa pembagian dari $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ oleh pembagi 5 dengan $m = 1, 2, 3, \dots, 10$ seperti terlihat pada tabel berikut:

Tabel 2. Sisa Pembagian dari $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ oleh pembagi 5

Pangkat <i>m</i>	Jumlah <i>n</i>														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	1	2	0	0	2	1	2	0	0	2	1	2	0	0
2	4	0	1	0	0	4	0	1	0	0	4	0	1	0	0
3	3	2	3	0	0	3	2	3	0	0	3	2	3	0	0
4	1	2	3	4	4	0	1	2	3	3	4	0	1	2	2
5	2	1	2	0	0	2	1	2	0	0	2	1	2	0	0
6	4	0	1	0	0	4	0	1	0	0	4	0	1	0	0
7	3	2	3	0	0	3	2	3	0	0	3	2	3	0	0
8	1	2	3	4	4	0	1	2	3	3	4	0	1	2	2
9	2	1	2	0	0	2	1	2	0	0	2	1	2	0	0
10	4	0	1	0	0	4	0	1	0	0	4	0	1	0	0

Berdasarkan Tabel 2 tersebut dapat diformulasikan karakteristik keterbagian $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ oleh pembagi 5 untuk setiap *n*. Perhatikan bahwa kolom 4, 5, 9, 10, 14, dan 15 mempunyai angka terakhir 0 jika dan hanya jika $m \neq 0 \pmod 4$. Jadi, untuk $n = 5r$ dan $5r - 1$ dengan $r \geq 1$ maka 5 dapat membagi barisan bilangan tersebut seperti dilambangkan sebagai berikut:

$$5 \mid \sum_{i=1}^n (7i)^m \leftrightarrow m \neq 0 \pmod 4 \quad \text{untuk } n = 5r \text{ dan } 5r - 1$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ kombinasi linear dari $\sum_{i=1}^n (3i)^m$ dan $\sum_{i=1}^n (5i)^m$, dimulai dengan mendaftarkan beberapa barisan bilangan yang dihasilkan oleh $\sum_{i=1}^n (3i)^m$, $\sum_{i=1}^n (5i)^m$, dan $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ untuk $m = 1, 2, 3, \dots, 10$ dengan tujuan untuk mempermudah dalam menunjukkan kombinasi linear barisan tersebut seperti terlihat pada tabel berikut:

Tabel 3. Barisan bilangan yang dihasilkan oleh $\sum_{i=1}^n (3i)^m$

Notasi Sigma	Barisan	Rumus Umum Suku ke <i>n</i>
$\sum_{i=1}^n 3i$	3, 9, 18, 30,..	$\frac{3}{2}n(n + 1)$

	$\sum_{i=1}^n (3i)^2$	9, 45, 126, 270..	$\frac{3}{2}n(n+1)(2n+1)$
$\sum_{i=1}^n (3i)^m$	$\sum_{i=1}^n (3i)^3$	27, 243, 972, 2700,...	$\frac{27}{4}n^2(n+1)^2$
	⋮	⋮	⋮
	$\sum_{i=1}^n (3i)^{10}$	59049, 20175075, 3547309626, 21821557950,...	$\frac{19683}{22}n(2n+1)(n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)$

Tabel 4. Barisan bilangan yang dihasilkan oleh $\sum_{i=1}^n (5i)^m$

Notasi Sigma	Barisan	Rumus Umum Suku ke n
$\sum_{i=1}^n 5i$	5, 15, 30, 50,..	$\frac{5}{2}n(n+1)$
$\sum_{i=1}^n (5i)^2$	25, 125, 350, 750..	$\frac{25}{6}n(n+1)(2n+1)$
$\sum_{i=1}^n (5i)^3$	125, 1125, 4500, 12500,...	$\frac{125}{4}n^2(n+1)^2$
$\sum_{i=1}^n (5i)^m$	⋮	⋮
	⋮	⋮
	$\sum_{i=1}^n (5i)^{10}$	9765625, 10009765625, 586660156250, 10826660156250,...

Tabel 5. Barisan bilangan yang dihasilkan oleh $\sum_{i=1}^n (7i)^m$

Notasi Sigma	Barisan	Rumus Umum Suku ke n
$\sum_{i=1}^n 7i$	7, 21, 42, 70,..	$\frac{7}{2}n(n+1)$
$\sum_{i=1}^n (7i)^2$	49, 245, 686, 1470..	$\frac{49}{6}n(n+1)(2n+1)$
$\sum_{i=1}^n (7i)^3$	343, 3087, 12348,34300,...	$\frac{343}{4}n^2(n+1)^2$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

$\sum_{i=1}^n (7i)^m$	$\sum_{i=1}^n (7i)^{10}$	282475249, 289537130225, 16969418108426, 313166184803850,...	$\frac{282475249}{66} n(2n+1)(n+1)(n^2+n-1)$ $(3n^6 + 9n^5 + 2n^4 - 11n^3 + 3n^2 + 10n - 5)$
-----------------------	--------------------------	---	---

Akan ditunjukkan bahwa barisan bilangan $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ merupakan kombinasi linear dari barisan bilangan $\sum_{i=1}^n (3i)^m$ dan barisan bilangan $\sum_{i=1}^n (5i)^m$ seperti contoh berikut:

Contoh 4.3 Apakah $c = \sum_{i=1}^n 7i = \frac{7}{2}n(n+1)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $a = \sum_{i=1}^n 3i = \frac{3}{2}n(n+1)$ dan $b = \sum_{i=1}^n 5i = \frac{5}{2}n(n+1)$?

Solusi. Akan ditentukan nilai p dan q yang memenuhi persamaan $pa + qb = c$

$$p\left(\frac{3}{2}n(n+1)\right) + q\left(\frac{5}{2}n(n+1)\right) = \frac{7}{2}n(n+1)$$

$$p\left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n\right) + q\left(\frac{5}{2}n^2 + \frac{5}{2}n\right) = \left(\frac{7}{2}n^2 + \frac{7}{2}n\right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Nilai p dan q ditentukan dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right] B_1 - B_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right]$$

$$\frac{3}{2}p + \frac{5}{2}q = \frac{7}{2}$$

$$\frac{3}{2}p = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}q$$

$$p = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}q$$

(4.3)

Untuk memperoleh p bilangan bulat maka $q = 2, 5, 8, \dots$ disubstitusikan ke persamaan (4.3) sebagai berikut:

Untuk $q = 2, p = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}(2) = -1$

Untuk $q = 5, p = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}(5) = -6$

Untuk $q = 8, p = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}(8) = -11$

...

Untuk $q = 11, 14, 17 \dots$ dapat dilakukan dengan cara yang sama.

Jadi diperoleh banyak solusi untuk p dan q . Jika dipilih salah satu solusi yaitu $p = -1$ dan $q = 2$ maka c merupakan kombinasi linear dari a dan b yang ditulis dalam bentuk $c = -a + 2b$.

4. Kesimpulan dan Saran

4.1. Kesimpulan

Hasil yang diperoleh adalah karakteristik sisa pembagian dari $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ oleh pembagi 3 dan 5 sebagai berikut:

$$3 \mid \sum_{i=1}^n (7i)^m \quad \text{untuk } n = 9r \text{ dan } 9r - 1$$
$$5 \mid \sum_{i=1}^n (7i)^m \leftrightarrow m \not\equiv 0 \pmod{4} \quad \text{untuk } n = 5r \text{ dan } 5r - 1$$

Kemudian terbukti bahwa $\sum_{i=1}^n (7i)^m$ merupakan kombinasi linear dari $\sum_{i=1}^n (3i)^m$ dan $\sum_{i=1}^n (5i)^m$

4.2. Saran

Pada tesis ini penulis membahas tentang analisis sisa pembagian dari $\sum_{i=1}^n (7i)^m$. Penulis menyarankan agar penelitian ini dapat dikembangkan untuk keterbagian bilangan lainnya agar nantinya dapat menghasilkan sebuah tulisan yang membahas seluruh karakteristik sisa pembagian bilangan.

5. Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada bapak Prof. Dr. Mashadi, M.Si dan ibu Dr. Sri Gemawati, M.Si selaku dosen pembimbing saya. Terima kasih kepada suami, orang tua, anak, dan keluarga tercinta yang telah memberi dukungan kepada saya.

Daftar Pustaka

Baker A. (1984). *The Theory of Numbers*, Cambridge University Press, Cambridge.

- Beezer R. A. (2006). *A First Course in Linear Algebra*, Free Software Foundation, Tacoma.
- Burton D. M. (2010). *Elementary Number Theory Seventh Edition*, McGraw-Hill Companies, New York.
- Clark W. E. (2003). *Elementary Number Theory*, Department of Mathematics University of South Florida Press, Florida.
- Goldberg R. R. (2010). *Methods of Real Analysis Second Edition*, John Willey and Sons Inc, New York.
- Gulliver T. A. (2010). Divisibility of Sums of Powers of Even Integers, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2010; 64; 191-198.
- Gulliver T. A. (2010). Divisibility of Sums of Powers of Odd Integers, *International Mathematical Forum*, 2010; 5; 3059-3066.
- Gulliver T. A. (2012). Sums of Powers of Integers Divisible by Three, *International Journal Contemporary Mathematical Sciences*, 2012; 7; 1895-1901.
- Jacob B. (1990). *Linear Algebra*, Dover Publication, New York.
- Kemendikbud. (2013). *Buku Matematika Untuk SMA/MA Kelas X*, Politeknik Negeri Media Kreatif, Jakarta.
- Koshy T. (2007). *Elementary Number Theory with Applications Second Edition*, Academic Press, London.
- Mashadi dan Hadi A. (2017). *Analisis I*, UR Press, Pekanbaru.
- Niven I., Zuckerman H. S., dan Montgomery H. L. (1991). *An Introduction to the Theory of Numbers Fifth Edition*, John Willey and Sons Inc, New York.
- Stark H. M. (1998). *An Introduction to Number Theory*, Markham Publishing Company, Chicago.
- Suprijanto dan Rusliansyah D. (2014). Observation on Sums of Powers of Integers Divisible by Four, *Applied Mathematical Sciences*, 2014; 8; 2219 – 2226.
- Suprijanto D. (2015). Observation on Sums of Powers of Integers Divisible by Five, *Applied Mathematical Sciences*, 2015; 9; 3679 – 3686.