PENGEMBANGAN TEOREMA DAO PADA ENAM CIRCUMCENTER

Husnul Khatimah[1], Mashadi[2], Sri Gemawati[3]
[1]*Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; husnul.khatimah@grad.unri.ac.id*
[2]*Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; Mashadi.mat@gmail.com*
[3]*Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; Gemawati.sri@gmail.com*

Abstrak

Dalam tulisan ini diberikan pengembangan dari Teorema Dao pada enam circumcenter yang terhubung dengan segienam siklis yang membentuk dua pasang segitiga *orthologic* dengan titik pusat *orthologic*-nya sama dengan titik pusat lingkaran awal. Pembuktian dari pengembangan teorema ini dilakukan dengan menggunakan konsep sederhana yang dapat dipahami oleh siswa sekolah menengah, yaitu konsep kekongruenan.

Kata Kunci: Teorema Dao, circumcenter, segitiga *orthologic*.

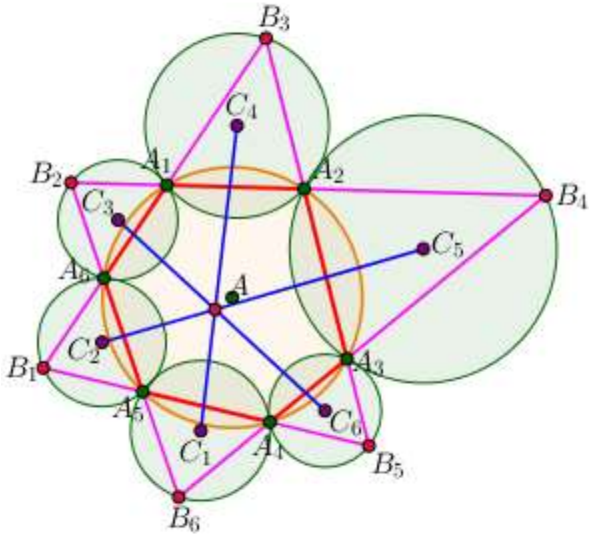
1. Pendahuluan

Di bidang geometri salah satu teorema yang membahas tentang lingkaran dan segitiga adalah teorema yang ditemukan oleh Dao Thanh Oai pada tahun 2013 (Duong, 2016). Ia memberikan sebuah teorema tanpa bukti yang diberi nama dengan "Teorema lain dari tujuh lingkaran" yang selanjutnya teorema tersebut lebih dikenal dengan nama "Teorema Dao pada enam circumcenter yang terhubung dengan segienam siklis", teorema tersebut dinyatakan sebagai berikut (Gambar 1):

Teorema 1 (Teorema Dao pada enam circumcenter yang terhubung dengan segienam siklis).

Diberikan enam titik sebarang pada sebuah lingkaran, katakan A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, dan A_6 . Jika $B_1 = A_4A_5 \cap A_1A_6$, $B_2 = A_5A_6 \cap A_1A_2$, $B_3 = A_1A_6 \cap A_2A_3$, $B_4 = A_1A_2 \cap A_3A_4$, $B_5 = A_2A_3 \cap A_4A_5$, $B_6 = A_3A_4 \cap A_5A_6$, dengan C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 , C_6 adalah circumcenter dari $\Delta A_4A_5B_6$, $\Delta A_5A_6B_1$, $\Delta A_1A_6B_2$, $\Delta A_1A_2B_3$, $\Delta A_2A_3B_4$, $\Delta A_3A_4B_5$, maka C_1C_4,C_2C_5 dan C_3C_6 kongkuren.

Dari Teorema Dao pada enam circumcenter yang terhubung dengan segienam siklis tersebut, telah ditemukan berbagai bukti dari beberapa matematikawan, seperti (Dergiades, 2014) dan (Cohl, 2014). Selanjutnya (Duong, 2016) memberikan problem tanpa bukti yang berkaitan dengan teorema tersebut yang menyatakan bahwa terdapat sepasang segitiga *orthologic*, yaitu $\Delta C_2C_4C_6$ dan $\Delta B_2B_4B_6$.



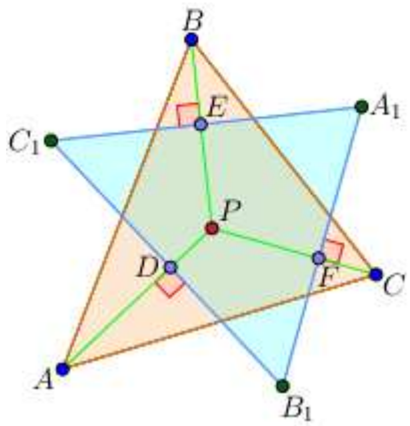
Gambar 1. Teorema Dao pada enam circumcenter yang terhubung dengan segienam siklis.

Pembahasan tentang ke-orthologikan segitiga telah banyak ditulis oleh beberapa peneliti antara lain (Cerin, 1997; Cerin, 2010; Patrascu dan Smarandache, 2010[a]; Patrascu dan Smarandache, 2010[b]). Adapun definisi dari segitiga-segitiga *orthologic* adalah sebagai berikut:

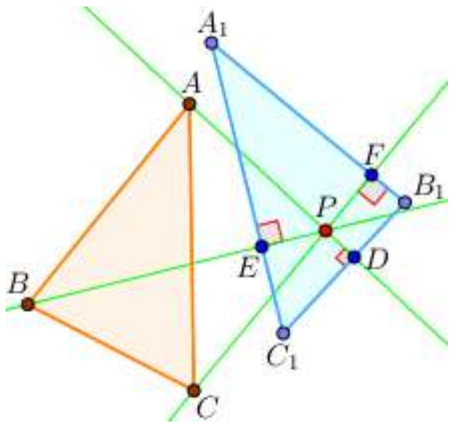
Definisi 2 (Segitiga-Segitiga *Orthologic*).

Dua buah segitiga dikatakan orthologic jika garis tegak lurus yang dibuat dari titik-titik puncak suatu segitiga terhadap sisi-sisi segitiga yang lainnya adalah kongkuren. Titik kongkuren tersebut disebut sebagai pusat *orthologic*.

Terdapat beberapa bentuk dari dua buah segitiga orthologic, berpotongan dan saling lepas. Pada Gambar 2 dan 3, ΔABC *orthologic* terhadap $\Delta A_1B_1C_1$ karena garis tegak lurus yang dibuat dari titik A, B, C secara berurutan terhadap sisi B_1C_1, C_1A_1 dan A_1B_1 adalah kongkuren dan titik P merupakan pusat *orthologic*-nya.



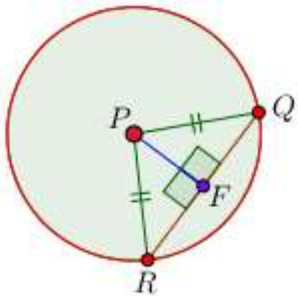
Gambar 2. ΔABC dan $\Delta A_1B_1C_1$ *orthologic* yang saling berpotongan.



Gambar 3. ΔABC dan $\Delta A_1B_1C_1$ *orthologic* yang saling lepas.

Beberapa teori lainnya diperlukan dalam pembuktian pengembangan Teorema Dao ini, diantaranya teorema tentang titik pusat lingkaran yang terdapat di dalam Mashadi (2012: 144) yang dinyatakan sebagai berikut:

Teorema 3. Garis tegak lurus dari pusat lingkaran ke suatu tali busur membagi tali busur tersebut menjadi dua bagian yang sama panjang.



Gambar 4. Ilustrasi Teorema 3.

Sejalan dengan Teorema 3 tersebut, Joyce (1996) dalam tulisannya menyebutkan bahwa pusat lingkaran terletak pada garis tegak lurus yang membagi tali busur menjadi dua bagian yang sama panjang.

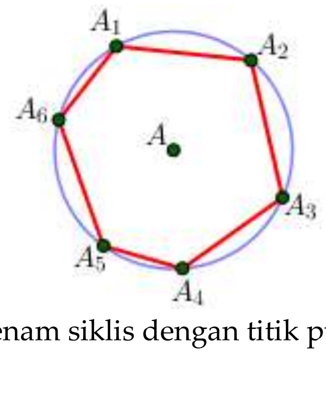
Corollary 4. Jika dalam lingkaran terdapat garis tegak lurus yang memotong tali busur menjadi dua bagian yang sama panjang, maka pusat lingkaran terletak pada garis tegak lurus tersebut.

Dengan menggunakan aplikasi Geogebra dalam eksperimen penelitian, penulis mendapatkan bahwa titik pusat *orthologic* dari $\Delta C_2C_4C_6$ terhadap $\Delta B_2B_4B_6$ adalah sama dengan titik pusat lingkaran awal. Penulis juga menemukan sepasang segitiga *orthologic* lainnya yang titik pusat *orthologic*-nya sama dengan titik pusat lingkaran awal yaitu $\Delta C_1C_3C_5$ dan $\Delta B_1B_3B_5$. Pembuktian pada tulisan ini menggunakan konsep yang dipahami oleh siswa tingkat sekolah menengah, yaitu konsep kekongruenan. Ide pembuktian kekongruenan telah banyak dibahas diantaranya oleh (Mashadi, 2012: 144; Mashadi, 2015: 22; Valentika dkk., 2016; Mashadi dkk., 2017). Selain itu, juga terdapat beberapa tulisan yang membahas teorema terkait dengan lingkaran, seperti yang ditulis oleh (Mashadi dkk., 2015) dan (Zukrianto dkk., 2016).

2. Metode

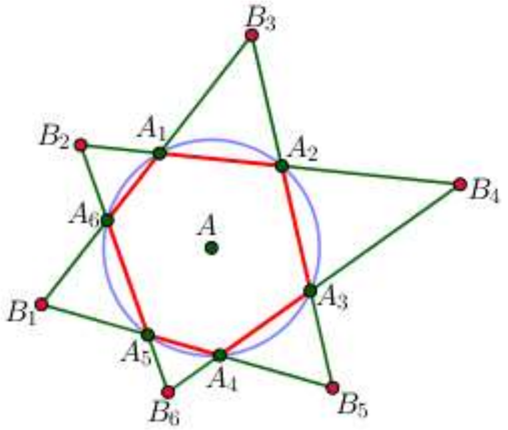
Pembuktian pengembangan Teorema Dao pada enam circumcenter yang terhubung dengan segienam siklis dalam membentuk dua pasang segitiga *orthologic* yang titik pusat *orthologic*-nya sama dengan titik pusat lingkaran awal dilakukan dengan menggunakan konsep kekongruenan. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Ambil enam sebarang titik pada sebuah lingkaran dengan titik pusat A, katakan A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 dan buat penggal garis A_iA_{i+1}, untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ dalam modulo 6. Perhatikan Gambar 5.



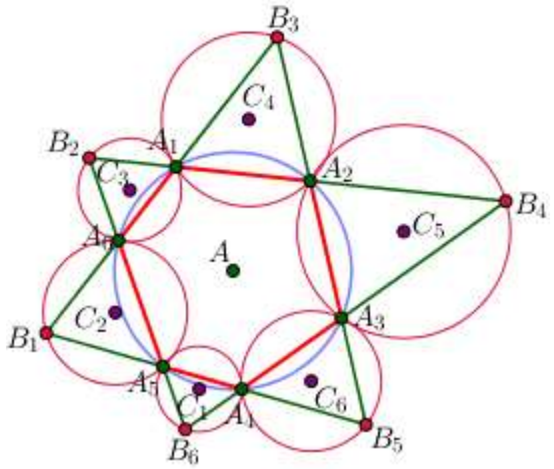
Gambar 5. Segienam siklis dengan titik pusat lingkaran A.

2. Dari langkah 1, perpanjang setiap sisinya sehingga A_iA_{i+1} dan $A_{i+2}A_{i+3}$ berpotongan, beri nama perpotongan garisnya dengan titik B_{i+3} , sehingga terbentuk satu buah segitiga baru disetiap sisi segienam siklis tersebut, yaitu $\Delta A_iA_{i+1}B_{i+2}$. Perhatikan Gambar 6.



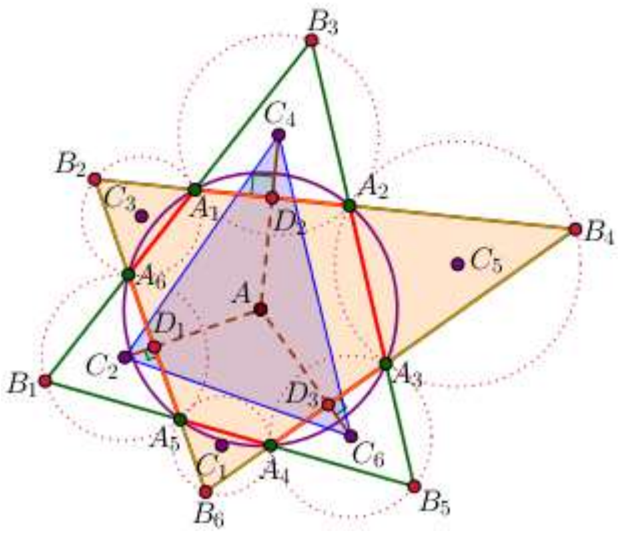
Gambar 6. Garis A_iA_{i+1} dan $A_{i+2}A_{i+3}$ berpotongan pada titik B_{i+3}.

3. Lukis lingkaran luar segitiga dari $\Delta A_iA_{i+1}B_{i+2}$ dan beri nama circumcenter-nya dengan C_{i+3}. Perhatikan Gambar 7.



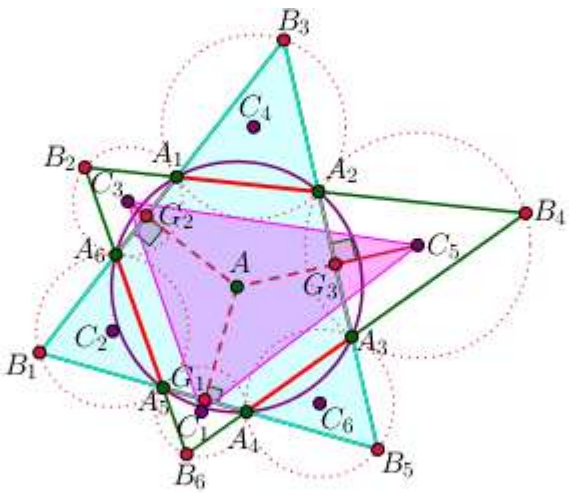
Gambar 7. Circumcenter C_{i+3} pada lingkaran luar $\Delta A_iA_{i+1}B_{i+2}$.

4. Lukis $\Delta C_2C_4C_6$ dan $\Delta B_2B_4B_6$. Kemudian tarik garis tegak lurus dari titik C_2 ke sisi B_2B_6, C_4 ke sisi B_2B_4, dan C_6 ke sisi B_4B_6,lalu beri nama titik perpotongannya secara berturut-turut dengan D_1 , D_2 dan D_3 . Dengan menggunakan konsep kekongruenan akan dibuktikan $\Delta C_2C_4C_6$ *orthologic* terhadap $\Delta B_2B_4B_6$ dan pusat *orthologic*-nya sama dengan titik pusat lingkaran awal dengan menunjukkan bahwa garis C_2D_1, C_4D_2, C_6D_3 berpotongan disatu titik yaitu titik A. Perhatikan Gambar 8.



Gambar 8. $\Delta C_2C_4C_6$ *orthologic* terhadap $\Delta B_2B_4B_6$.

5. Selanjutnya, lukis $\Delta C_1C_3C_5$ dan $\Delta B_1B_3B_5$. Kemudian tarik garis tegak lurus dari titik C_1 ke sisi B_1B_5, C_3 ke sisi B_1B_3, dan C_5 ke sisi B_3B_5, lalu beri nama titik perpotongannya secara berturut-turut dengan G_1, G_2 dan G_3. Juga menggunakan konsep kekongruenan, akan dibuktikan $\Delta C_1C_3C_5$ *orthologic* terhadap $\Delta B_1B_3B_5$ dan titik pusat *orthologic*-nya sama dengan titik pusat lingakaran awal dengan menunjukkan bahwa garis C_1G_1, C_3G_2, dan C_5G_3 berpotongan disatu titik yaitu titik A. Perhatikan Gambar 9.



Gambar 9. $\Delta C_1C_3C_5$ orthologic terhadap $\Delta B_1B_3B_5$.

3. Hasil dan Pembahasan

Pengembangan Teorema Dao pada enam circumcenter yang terhubung dengan segienam siklis dalam membentuk dua pasang segitiga *orthologic* yang titik pusat *orthologic*-nya sama dengan titik pusat lingkaran awal penulis nyatakan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema 6. Diberikan enam sebarang titik pada lingkaran dengan titik pusat A, katakan A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, dan A_6. Jika $B_1 = A_4A_5 \cap A_1A_6, B_2 = A_5A_6 \cap A_1A_2, B_3 = A_1A_6 \cap A_2A_3, B_4 = A_1A_2 \cap A_3A_4, B_5 = A_2A_3 \cap A_4A_5$, $B_6 = A_3A_4A_5A_6$, dan C_1, C_2,C_3, C_4, C_5, C_6 secara berurutan adalah circumcenter dari $\Delta A_4A_5B_6$, $\Delta A_5A_6B_1$, $\Delta A_1A_6B_2$, $\Delta A_1A_2B_3$, $\Delta A_2A_3B_4$, $\Delta A_3A_4B_5$, maka $\Delta C_2C_4C_6$ akan *orthologic* terhadap $\Delta B_2B_4B_6$ dan $\Delta C_1C_3C_5$ *orthologic* terhadap $\Delta B_1B_3B_5$, dengan pusat*orthologic* kedua pasang segi tiga tersebut sama dengan titik pusat lingkaran awal.

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $\Delta C_2C_4C_6$ *orthologic* terhadap $\Delta B_2B_4B_6$ dengan titik pusat *orthologic*-nya sama dengan titik pusat lingkaran awal, maka akan dibuktikan bahwa titik A terdapat pada garis C_2D_1, C_4D_2, dan C_6D_3, yang ketiga garis tersebut secara berturut-turut merupakan garis tegak lurus terhadap garis B_2B_6, B_2B_4, dan B_4B_6, seperti terlihat pada Gambar 8.

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa $\Delta C_1C_3C_5$ orthologic terhadap $\Delta B_1B_3B_5$ dengan titik pusat orthologic-nya sama dengan titik pusat lingkaran awal, maka akan dibuktikan bahwa titik A juga terdapat pada garis C_1G_1, C_3G_2, dan C_5G_3, yang ketiga garis tersebut secara berturut-turut merupakan garis tegak lurus terhadap garis B_1B_5, B_1B_3, dan B_3B_5, seperti terlihat pada Gambar 9.

1) Membuktikan bahwa $\Delta C_2C_4C_6$ *orthologic* terhadap $\Delta B_2B_4B_6$ dengan titik pusat *orthologic*-nya sama dengan titik pusat lingkaran awal. Perhatikan Gambar 11.
   Perhatikan $\Delta C_2C_4C_6$ dan $\Delta B_2B_4B_6$. Tarik garis tegak lurus dari titik C_2 ke sisi B_2B_6, sehingga garis $C_2D_1 \perp B_2B_6$. Karena B_2B_6 merupakan perpanjangan dari garis A_5A_6 maka $C_2D_1 \perp A_5A_6$. Kemudian diketahui bahwa C_2 merupakan circumcenter atau titik pusat lingkaran luar dari $\Delta B_1A_5A_6$, dan A_5A_6 merupakan tali busur dari lingkaran C_2.
   Akan dibuktikan $D_1A_5 = D_1A_6$. Dari pusat C_2 ditarik garis yang menghubungkan titik-titik A_5 dan A_6,sehingga diperoleh C_2A_5 dan C_2A_6 yang merupakan jari-jari lingkaran sehingga diperoleh $\Delta C_2A_5A_6$ yang merupakan segitiga sama kaki, sehingga
   $$m\angle C_2A_5D_1 = m\angle C_2A_6D_1 \quad (1)$$
   Pada $\Delta C_2A_5D_1$ dan $\Delta C_2A_6D_1$, C_2D_1 adalah segmen garis yang sama sehingga C_2D_1 kongruen diri sendiri yaitu
   $$C_2D_1 \cong C_2D_1 \quad \text{(sisi)}$$
   Karena $C_2D_1 \perp A_5A_6$ maka $m\angle C_2D_1A_5 = m\angle C_2D_1A_5 = 90^0$ sehingga

$$\angle C_2D_1A_5 \cong \angle C_2D_1A_5 \qquad \text{(sudut)}$$

Dari persamaan (1) diperoleh

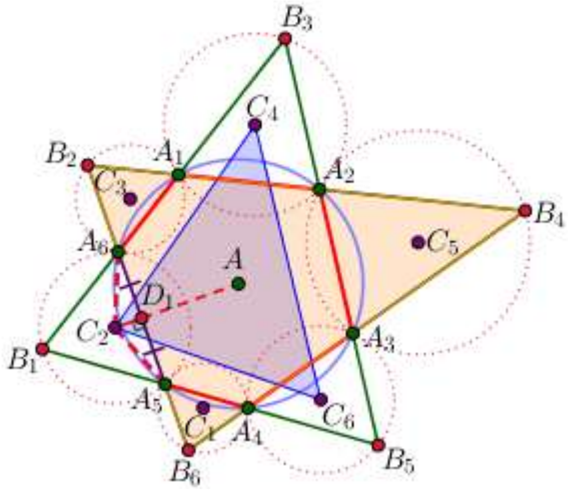
$$\angle C_2A_5D_1 \cong \angle C_2A_6D_1 \qquad \text{(sudut)}$$

Sehingga dari kongruensi sisi-sudut-sudut diperoleh bahwa

$$\Delta C_2A_5D_1 \cong \Delta C_2A_6D_1.$$

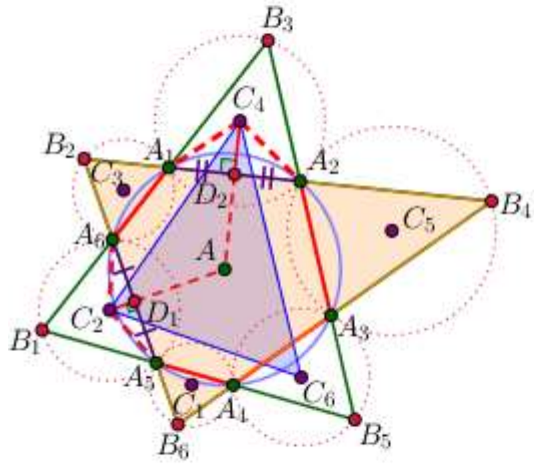
Jadi, terdapat sisi yang berkorespondensi kongruen, yaitu $D_1A_5 \cong D_1A_6$ atau $D_1A_5 = D_1A_6$.

Perhatikan bahwa A_5A_6 juga merupakan tali busur dari lingkaran dengan titik pusat A. Jadi perpanjangan C_2D_1 juga merupakan garis tegak lurus yang membagi tali busur A_5A_6 pada lingkaran A menjadi dua bagian yang sama panjang. Sehingga berdasarkan corollary 4, maka titik pusat lingkaran A terdapat pada garis C_2D_1, seperti pada Gambar 12.



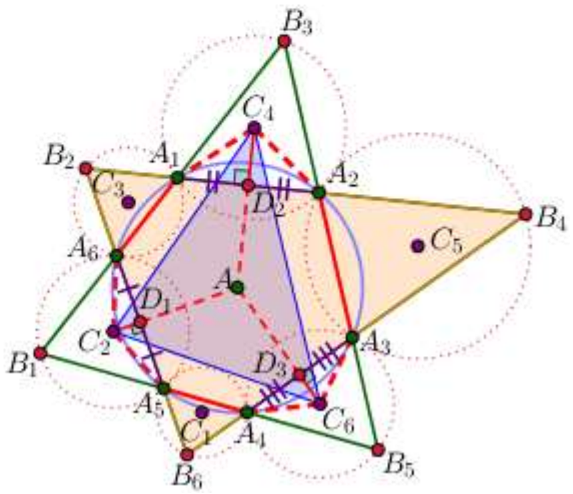
Gambar 12. $C_2D_1 \perp B_2B_6$.

Selanjutnya, tarik juga garis tegak lurus dari titik C_4 ke sisi B_2B_4, sehingga garis $C_4D_2 \perp B_2B_4$. Karena B_2B_4 merupakan perpanjangan dari A_1A_2 maka $C_4D_2 \perp A_1A_2$.Kemudian diketahui bahwa C_4 merupakan circumcenter dari $\Delta B_3A_1A_2$,dan A_1A_2 merupakan tali busur dari lingkaran dengan titik pusat C_4. Dengan menggunakan konsep kekongruenan seperti cara sebelumnya, maka didapatkan bahwa garis tegak lurus dari C_4 terhadap tali busur A_1A_2 membagi A_1A_2 menjadi dua bagian sama panjang, $D_2A_1 = D_2A_2$. Dan perpanjangan C_4D_2 juga merupakan garis tegak lurus yang membagi tali busur A_1A_2 pada lingkaran A menjadi dua bagian yang sama panjang. Sehingga berdasarkan corollary 4, maka titik pusat lingkaran A terdapat pada garis C_4D_2, seperti pada Gambar 13.



Gambar 13. $C_4D_2 \perp B_2B_4$.

Tarik garis tegak lurus dari titik C_6 ke sisi B_4B_6 , sehingga garis $C_6D_3 \perp B_4B_6$. Karena B_4B_6 merupakan perpanjangan dari A_3A_4 maka $C_6D_3 \perp A_3A_4$.Kemudian diketahui bahwa C_6 merupakan circumcenter dari $\Delta B_5A_3A_4$, dan A_3A_4 merupakan tali busur dari lingkaran $B_5A_3A_4$.Juga dengan menggunakan konsep kekongruenan seperti cara sebelumnya, maka didapatkan bahwa garis tegak lurus dari C_6 terhadap tali busur A_3A_4 membagi A_3A_4 menjadi dua bagian sama panjang, $D_3A_3 = D_3A_4$. Perhatikan bahwa A_3A_4 juga merupakan tali busur dari lingkaran dengan titik pusat A dan perpanjangan C_6D_3 juga merupakan garis tegak lurus yang membagi tali busur A_3A_4 pada lingkaran A menjadi dua bagian yang sama panjang. Sehingga berdasarkan corollary 4, maka titik pusat lingkaran A terdapat pada garis C_6D_3, seperti pada Gambar 14.

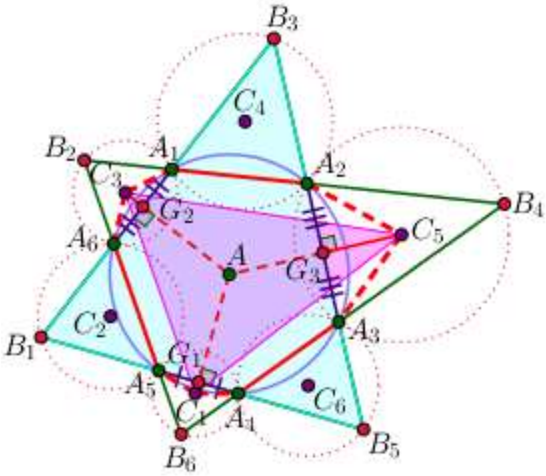


Gambar 14. $C_6D_3 \perp B_4B_6$.

Jadi, dari penjelasan diatas maka tentulah perpanjangan C_2D_1, C_4D_2, dan C_6D_3 berpotongan di satu titik yaitu titik pusat lingkaran A dan $\Delta C_2C_4C_6$ dan $\Delta B_2B_4B_6$ adalah segitiga *orthologic*, dengan titik pusat *orthologic* $\Delta C_2C_4C_6$ terhadap $\Delta B_2B_4B_6$ adalah sama dengan titik pusat lingkaran awal.

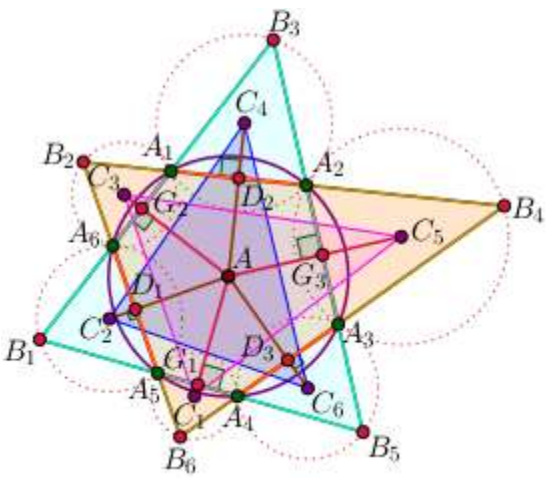
2) Membuktikan bahwa $\Delta C_1C_3C_5$ orthologic terhadap $\Delta B_1B_3B_5$ dengan titik pusat orthologic-nya sama dengan titik pusat lingkaran awal.

   Dengan cara yang sama pada pembuktiaan $\Delta C_2C_4C_6$ yang *orthologic* terhadap $\Delta B_2B_4B_6$ yang pusat *orthologic*-nya sama dengan titik pusat lingkaran awal, maka juga dapat dibuktikan bahwa $\Delta C_1C_3C_5$ *orthologic* terhadap $\Delta B_1B_3B_5$ yang titik pusat orthologic-nya juga sama dengan titik pusat lingkaran awal, seperti Gambar 15.



Gambar 15. $\Delta C_1C_3C_5$ dan $\Delta B_1B_3B_5$ adalah *orthologic*.

Jadi, dari Teorema Dao pada enam circumcenter yang terhubung dengan segienam siklis, terdapat dua pasang segitiga yang *orthologic* yang titik pusat *orthologic*-nya sama dengan titik pusat lingkaran awal, yaitu $\Delta C_2C_4C_6$ terhadap $\Delta B_2B_4B_6$, dan $\Delta C_1C_3C_5$ terhadap $\Delta B_1B_3B_5$, seperti terlihat pada Gambar 16.



Gambar 16. $\Delta C_2C_4C_6$ dan $\Delta B_2B_4B_6$ serta $\Delta C_1C_3C_5$ dan $\Delta B_1B_3B_5$ adalah dua pasang segitiga *orthologic*

4. Simpulan dan Saran

4.1. Simpulan

Dari Teorema Dao pada enam circumcenter yang terhubung dengan segienam siklis terdapat dua pasang segitiga yang *orthologic* yang titik pusat *orthologic* dari kedua pasang segitiga tersebut sama dengan titik pusat lingkaran awal.

4.2. Saran

Bagi pembaca yang tertarik dengan tulisan ini, disarankan agar membahas tentang berbagai akibat lainnya yang diperoleh dari Teorema Dao pada enam circumcenter yang terhubung dengan segienam siklis seperti hubungan keenam titik potong dari perpanjangan sisi-sisi segienam siklis, atau hubungan enam titik perpotongan lingkaran-lingkaran luar segitiga dari segitiga yang terbentuk berdasarkan perpanjangan sisi-sisi segienam siklis.

Daftar Pustaka

Cerin, Zvanko. (1997). Hyperbolas and orthologic triangles, *Mathematica Pannonica*, **8**; 201-214.

Cerin, Zvanko. (2010). Rings of Squares around orthologic triangles, *Forum Geometricorum* **9**; 57-80.

Cohl, Telv. (2014). A purely synthetic proof of Dao's theorem on six circumcenters associated with a cyclic hexagon, *Forum Geometricorum* 2014; **14**; 261-264.

Dergiades, Nikolas. (2014). Dao's theorem on six circumcenters associated with a cyclic hexagon, *Forum Geometricorum* 2014; **14**; 243-246.

Duong, N. Q. (2016). Some problems around the Dao's theorem on six circumcenters associated with a cyclic hexagon configuration, *The International Journal of Computer Discovered Mathematics* 2016; **1**; 40-47.

Joyce, D. E. (1996). *Euclid's Elements*, Department of Mathematics and Computer Science Clark University, Worcester.

Mashadi. (2012). *Geometri*. Pekanbaru: Pusbangdik Universitas Riau.

Mashadi. (2015). *Geometri Lanjut*. Pekanbaru: Universitas Riau Press.

Mashadi, Gemawati, S., Hasriati dan Herlinawati, S. (2015). Semi-Excircle of Quadrilateral, *JP Journal of Mathematical Sciences*, **15**; 1-13.

Mashadi, Valentika, C., dan Gemawati, S. (2017). Development of Napoleon's Theorem on the Rectanglesin Case of Inside Direction, *International Journal of Theoretical and Applied Mathematics*, 3(2): 54-57.

Patrascu, I., dan Smarandache, F. (2010[a]). A Theorem about Simultaneous Orthological and Homological Triangles, *Smarandhace Nations Journal*; **1**; 1-13.

Patrascu, I., dan Smarandache, F. (2010[b]). Pantazi's theorem regarding the bi-orthological triangles, *Smarandhace Nations Journal*; **1**; 1-5.

Valentika, C., Mashadi, dan Gemawati, S. (2016). The Development Of Napoleon's Theorem On Quadrilateral With Congruence And Trigonometry, *Bulletin of Mathematics* 2016; **8**; 97–108.

Zukrianto, Mashadi, dan Gemawati, S. (2016). A nonconvex quadrilateral and Semi Georgonne Points on it: some results and analysis, *Fundamental Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2016, **6**; 111-124.