

PENGEMBANGAN TITIK MIQUEL DALAM PADA SEBARANG SEGIEMPAT

Delisa Pratiwi¹⁾, Mashadi²⁾, Sri Gemawati³⁾

¹⁾Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; delisapratii@gmail.com

²⁾Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; mashadi.mat@gmail.com

³⁾Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; gemawati.sri@gmail.com

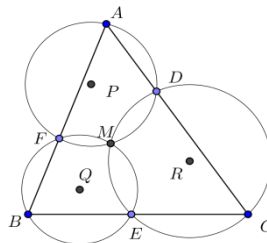
Abstrak

Teorema Miquel pada umumnya hanya diberlakukan pada segitiga. Pada tulisan ini, akan diperumum titik Miquel pada segiempat. Perumuman akan dibagi pada dua kasus, yaitu untuk segiempat konveks dan segiempat tidak konveks. Pembuktian akan dilakukan dengan menggunakan konsep yang sederhana yaitu konsep lingkaran dan segiempat siklik, sehingga teorema yang sulit ini dapat dipahami oleh siswa sekolah menengah.

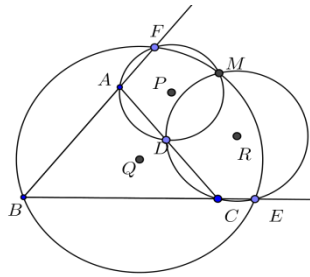
Kata Kunci. Teorema Miquel, segiempat konveks, segiempat tidak konveks

1. Pendahuluan

Dalam bidang geometri salah satu teorema yang membahas tentang segitiga yaitu Teorema Miquel. Teorema Miquel atau disebut juga dengan Teorema Pivot, awalnya dibahas oleh Walles pada tahun 1799 dan kemudian dibuktikan oleh Miquel pada tahun 1838 (Villier, 2014). Posamentier menyatakan Teorema Miquel dikonstruksi pada sebarang segitiga kemudian di pilih sebarang titik pada setiap sisinya, maka lingkaran yang melalui setiap vertex dan titik-titik yang berada pada sisi yang berdekatan berpotongan di satu titik atau titik Miquel. Seperti yang terlihat pada Gambar 1 dan Gambar 2, lingkaran P , Q dan R berpotongan di titik M .



Gambar 1. Titik Miquel M di dalam segitiga



Gambar 2. Titik Miquel M di luar segitiga

Beberapa pengembangan Teorema Miquel pada segitiga antara lain Posamentier (2002: 101); Posamentier and Lehmann, 2012; Yiu (2002: 69), 2014; Leonard et. Al (2014); Johnson (1960: 131). Pada makalah ini Teorema Miquel dibuktikan dengan menggunakan konsep yang dipahami oleh siswa tingkat SMP dan SMA yaitu konsep lingkaran Mashadi (2015 : 141) dan Mashadi (2016 : 21) serta segiempat siklik Mashadi (2015 : 150) dan Mashadi (2016 : 75). Ide Pembuktian lingkaran telah dibahas juga oleh (Zukrianto, et. Al, 2016). Berdasarkan Teorema Miquel pada sebarang segitiga yang mana lingkaran luar segitiga berpotongan pada satu titik yaitu titik Miquel, maka penulis tertarik untuk membahas titik Miquel dalam pada sebarang segiempat.

2. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan yaitu metode eksperimen dengan aplikasi Geogebra. Geogebra dikembangkan oleh Markus Hohenwarter pada tahun 2001. Menurut Hohenwarter (2008), Geogebra adalah program komputer untuk membelajarkan matematika khususnya geometri dan aljabar Pembuktian titik Miquel di dalam segiempat konveks dan segiempat tidak konveks dengan menggunakan pendekatan lingkaran dan segiempat siklik. Langkah-langkah untuk pengembangan teorema Miquel di dalam segiempat konveks , sebagai berikut.

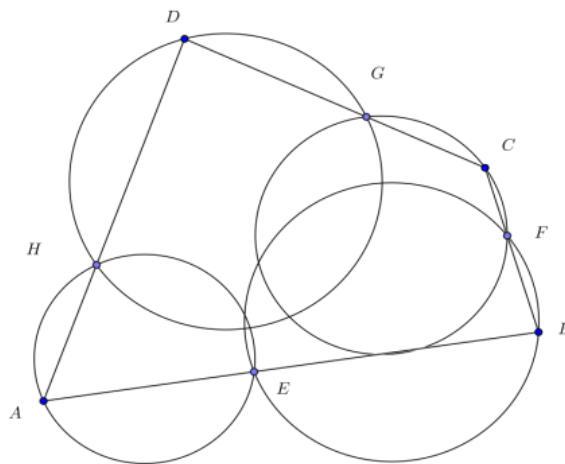
- 1) Diberikan sebuah segiempat konveks, pilih sebarang 3 titik pada sisi segiempat. Konstruksi lingkaran yang melalui vertex dan titik-titik yang berdekatan hingga kedua lingkaran berpotongan pada satu titik.
- 2) Kemudian konstruksi lingkaran dari vertex, salah satu titik yang berdekatan dan perpotongan dua lingkaran sebelumnya sehingga diperoleh sebuah titik pada sisi segiempat konveks lainnya.
- 3) Konstruksi lagi lingkaran dari vertex dan titik-titik yang berdekatan, Sehingga keempat lingkaran berpotongan pada satu titik atau titik Miquel.
- 4) Untuk membuktikan keempat lingkaran berpotongan pada satu titik digunakan konsep lingkaran dan segiempat siklik.

Selanjutnya, langkah-langkah untuk pengembangan Teorema Miquel di dalam segiempat tidak konveks, sebagai berikut.

- 1) Diberikan sebuah segiempat tidak konveks, pilih sebarang titik pada sisi segiempat, 2 titik pada perpanjangan sisi segiempat tidak konveks. Konstruksi lingkaran yang melalui vertex dan titik-titik yang berdekatan hingga kedua lingkaran berpotongan.
- 2) Kemudian konstruksi lingkaran yang melalui vertex, salah satu titik yang berdekatan dan perpotongan dua lingkaran sebelumnya sehingga diperoleh sebuah titik pada sisi segiempat tidak konveks lainnya.
- 3) Konstruksi lagi lingkaran melalui vertex dan titik-titik yang berdekatan, Sehingga keempat lingkaran berpotongan pada satu titik atau titik Miquel.
- 4) Untuk membuktikan keempat lingkaran berpotongan pada satu titik digunakan konsep lingkaran dan segiempat siklik.

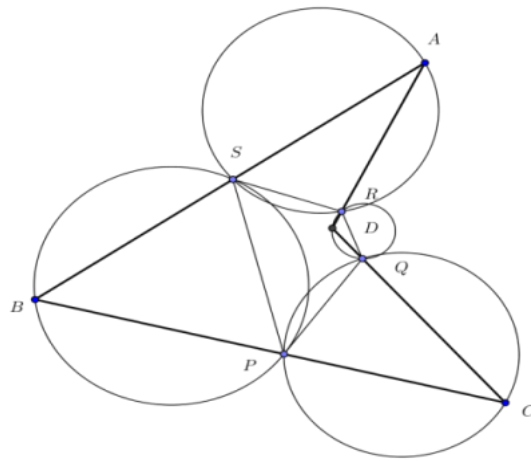
3. Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan Teorema Miquel yang dibentuk dari sebarang titik yang dipilih pada setiap sisi segitiga dan lingkaran luarnya berpotongan pada satu titik. Dari beberapa percobaan yang dilakukan penulis dengan menggunakan aplikasi Geogebra untuk mengembangkan Teorema Miquel pada segiempat, khususnya di dalam segiempat konveks dan segiempat tidak konveks. Diasumsikan pada segiempat konveks apabila dipilih sebarang titik pada setiap sisi segiempat maka lingkaran luarnya tidak berpotongan pada satu titik. Perhatikan Gambar 3.



Gambar 3. Percobaan yang dilakukan pada segiempat konveks

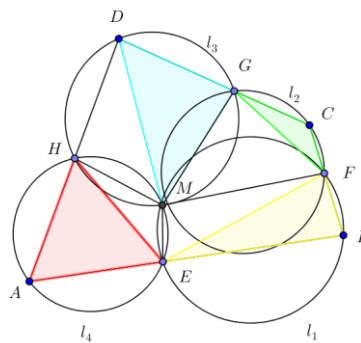
Kemudian pada segiempat tak konveks apabila dipilih sebarang titik pada setiap sisi segiempat maka lingkaran luarnya tidak berpotongan pada satu titik. Perhatikan Gambar 4.



Gambar 4. Percobaan yang dilakukan pada segiempat tidak konveks

Oleh karena itu ada syarat untuk pemilihan titik untuk Teorema Miquel dalam pada segiempat konveks dan segiempat tidak konveks. Berikut diberikan Teorema Miquel di dalam segiempat konveks dan tidak konveks.

Teorema 1 Diberikan sebarang segiempat konveks $ABCD$. Pilih berturut-turut sebarang titik E, F dan G masing-masing pada sisi AB, BC dan CD . Misalkan M adalah titik potong lingkaran luar $\triangle BEF$ dan lingkaran luar $\triangle CFG$. Bentuk lingkaran luar $\triangle DGM$ dan memotong sisi AD dititik H . Maka lingkaran luar $\triangle AEH$ juga melalui M .



Gambar 5. Pembuktian titik Miquel di dalam pada segiempat konveks

Bukti: Titik M merupakan titik perpotongan lingkaran l_1, l_2 dan l_3 . Kontruksi garis EM, FM, GM dan HM , maka $\triangle BEF, \triangle CFG$ dan $\triangle DGMH$ adalah siklik. Akan ditunjukkan bahwa segiempat $AEMH$ juga siklik.

$\triangle BEF$ adalah segiempat siklik, maka

$$\angle EMF = 180^\circ - \angle EBF \quad (1)$$

$CFMG$ adalah segiempat sikli, maka

$$\angle FMG = 180^\circ - \angle FCG \quad (2)$$

$DGMH$ adalah segiempat sikli, maka

$$\angle GMH = 180^\circ - \angle GDH \quad (3)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (1), persamaan (2) dan persamaan (3), diperoleh

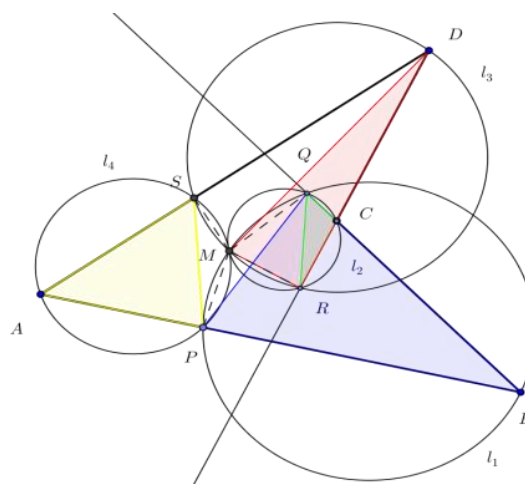
$$\begin{aligned} \angle EMF + \angle FMG + \angle GMH &= \\ &= (180^\circ - \angle EBF) + (180^\circ - \angle FCG) + (180^\circ - \angle GDH) \\ &= 540^\circ - (\angle EBF + \angle FCG + \angle GDH) \\ &= 540^\circ - (\angle B + \angle C + \angle D) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \angle EMH &= (\angle B + \angle C + \angle D) - 180^\circ \\ &= (360^\circ - \angle A) - 180^\circ \\ &= 180^\circ - \angle A \\ &= 180^\circ - \angle EAH \end{aligned}$$

Terbukti $AEMH$ juga merupakan segiempat siklik. Sehingga lingkaran l_1, l_2, l_3 dan l_4 berpotongan pada titik M atau titik Miquel.

Teorema 2 Diberikan sebarang segiempat tak konveks $ABCD$. Pilih berturut-turut sebarang titik P, Q dan R masing-masing pada sisi AB , perpanjangan sisi BC dan pepanjangan sisi CD . Misalkan M adalah titik potong lingkaran luar $\triangle BPQ$ dan lingkaran luar $\triangle CQR$. Bentuk lingkaran luar $\triangle DRM$ dan memotong sisi AD dititik S . Maka lingkaran luar APS juga melalui M .



Gambar 6. Pembuktian Titik Miquel di dalam segiempat tidak konveks

Bukti: Titik M merupakan titik perpotongan lingkaran l_1 , l_2 dan l_3 . Kontruksi garis PM, QM, RM dan SM , maka $BPMQ, CQMR$ dan $DRMS$. Dalah siklik. Akan ditunjukkan bahwa segiempat $AEMH$ juga siklik.

$BPMQ$ adalah segiempat sikli, maka

$$\angle PMQ = 180^\circ - \angle PBQ$$

$CQMR$ adalah segiempat sikli, maka

$$\angle QMR = 180^\circ - \angle QCR$$

$DRMS$ adalah segiempat sikli, maka

$$\angle RMS = 180^\circ - \angle RDS$$

Perhatikan $\angle PAS$ dan $\angle PMS$ pada Gambar 6, diperoleh

$$\angle PAS = 360^\circ - (\angle PBQ + \angle QCR + \angle RDS) \quad (4)$$

Dan

$$\angle PMS = (\angle PBQ + \angle QCR + \angle RDS) - 180^\circ \quad (5)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (4) dan persamaan (5), diperoleh

$$\begin{aligned} \angle PAS + \angle PMS &= \\ &= 360^\circ - (\angle PBQ + \angle QCR + \angle RDS) \\ &\quad + (\angle PBQ + \angle QCR + \angle RDS) - 180^\circ \\ &= (360^\circ - 180^\circ) - (\angle PBQ + \angle QCR + \angle RDS) \\ &\quad + (\angle PBQ + \angle QCR + \angle RDS) \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

Terbukti $APMS$ juga merupakan segiempat siklik. Sehingga lingkaran l_1, l_2, l_3 dan l_4 berpotongan pada titik M atau titik Miquel.

4. Simpulan dan Saran

4.1. Simpulan

Secara umum Teorema Miquel dibahas pada segitiga. Pada tulisan ini pengembangan Titik Miquel di dalam segiempat konveks dan segiempat tidak konveks, sehingga ditemukan keempat lingkaran berpotongan di satu titik yaitu titik Miquel.

4.2. Saran

Disarankan agar membahas tentang titik Miquel pada segilima dan segi_n selanjutnya yang berada di dalam ataupun yang berada di luar segilima dan segi-n.

Daftar Pustaka

- Hohenwarter, M. et al. (2008) *Teaching and learning Calculus WITH Free Dynamic Matgematics Software Geogebra*. <http://www.publications.uni.lu/recored/2718/files/ICME11-TSG16.pdf>, diakses 13 Januari 2017.
- Johnson R. A. (1960). *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publication, Inc. New York.
- Leonard I. E., Lewis J. E, Liu A. C. F dan Tokarsky G. W. (2014). *Classical Geometry*, Wiley, Canada.
- Mashadi. (2015). *Geometri* (edisi kedua), Unri Press, Pekanbaru.
- Mashadi. (2016). *Pengajaran Matematika*, UR Press, Pekanbaru.
- Posamentier A. S. (2002), *Advanced Euclidian Geometry*, Key College Publishing, New York.
- Posamentier A. S. dan I. Lehmann. (2012). *The Secreet of Triangle*, Prometheus Books, New York.
- Villier M. D. (2014). *A Variation of Miquel Theoreme and its generalization*, The Mathematical Gazzete, 334-339.
- Yiu P. (2002). *Introduction to the Geometry of Triangle*. Departement Mathematics florida Atlantic University.
- Zukrianto. Mashadi, dan Gemawati S. (2016). *A nonconveks quadrilateral and Semi Gergone Point on it: some results and analysis*. *Fundamental Journal of Mathematics and Matematical Sciences* 2016, 6: 111 – 124.