FUNGTOR HOM DAN FUNGTOR TENSOR PADA $\mathcal{L}-$HOMOMORFISMA MODUL

Denik Agustito

Universitas Sarjanawiyata Tamansiwa; rafaelagustito@gmail.com

Abstrak

Sebuah $\mathcal{L}-$modul adalah pasangan dari suatu R-modul bersama dengan suatu submodulnya. Dari gagasan $\mathcal{L}-$modul juga analog dengan gagasan R-modul yaitu memiliki $\mathcal{L}-$submodul, $\mathcal{L}-$homomorfisma dan $\mathcal{L}-$modul faktor. Kemudian sifat-sifat dari fungtor Hom dan fungtor Tensor jika dikenakan pada $\mathcal{L}-$homomorfisma adalah bahwa fungtor Hom melestarikan $\mathcal{L}-$monomorfisma dan fungtor Tensor melestarikan $\mathcal{L}-$epimorfisma.

Kata Kunci: fungtor, homomorfisma, modul, modul faktor, submodul

1. Pendahuluan

Penelitian ini dimotivasi pada paper dari Davvas dan Parnian yang berjudul *A Note on Exact Sequence* yaitu mengenai perumuman gagasan barisan eksak dari R-modul bersama dengan R-homomorfismanya. Paper tersebut mengatakan bahwa barisan dari R-modul bersama dengan R-homomorfismanya yaitu sebagai berikut:

$$\dots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

dikatakan eksak di M_n jika $im\, f_{n-1} = \ker f_n = f_n^{-1}(\{0\})$. Davvas memperumum gagasan barisan eksak ini dengan mengganti submodul $\{0\}$ menjadi sembarang submodul U dari M_{n+1} sehingga diperoleh sebuah gagasan mengenai barisan eksak U yang didefinisikan sebagai dari R-modul bersama dengan R-homomorfismanya yaitu sebagai berikut:

$$\dots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

dan sifatnya $im\, f_{n-1} = f_n^{-1}(U)$ dengan U adalah suatu submodul dari M_{n+1}.

Beberapa bentuk perumuman dari gagasan yang diberikan oleh Davvas yaitu jika diberikan barisan dari R-modul bersama dengan R-homomorfismanya yaitu sebagai berikut:

$$\dots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

maka

(i). Dikatakan eksak U di M_n jika $im\, f_{n-1} = f_n^{-1}(U)$ dengan U adalah suatu submodul dari M_{n+1}.

(ii). Dikatakan koeksak V jika $f_{n-1}(V) = \ker f_n$ dengan V adalah suatu submodul dari M_{n-1}.

(iii). Dikatakan bieksak (U, V) jika $f_{n-1}(V) = f_n^{-1}(U)$ dengan V suatu submodul dari M_{n-1} dan U suatu submodul dari M_{n+1}.

Terlihat jelas bahwa barisan bieksak (U, V) adalah bentuk perumuman dari barisan eksak U dan koeksak V dan untuk itu penulis tertarik dengan gagasan barisan bieksak (U, V). Dengan gagasan bieksak ini, penulis akan mengganti $f_{n-1}(V) = f_n^{-1}(U)$ ke dalam istilah lain yaitu $\mathcal{L}im f_{n-1} = \mathcal{L} \ker f_n$ dimana $f_{n-1}: (M_{n-1}, V) \longrightarrow (M_n, W)$ dan $f_n: (M_n, W) \longrightarrow (M_{n+1}, U)$ adalah dua buah $\mathcal{L}$ −homomorfisma.

Dari latar belakang tersebut tentang motivasi awal dari gagasan $\mathcal{L}$ −homomorfisma diperoleh rumusan masalah yaitu sebagai berikut: Apa itu $\mathcal{L}$ −modul, $\mathcal{L}$ −submodul dan $\mathcal{L}$ −homomorfisma serta apa saja sifat-sifatnya? Sifat-sifat apa saja bagi fungtor Hom dan fungtor tensor jika dikenakan oleh $\mathcal{L}$ −homomorfisma?. Tujuan dari penulisan ini adalah sebagai berikut: Mengembangkan gagasan keeksakan dari barisan eksak biasa pada R-modul menjadi gagasan barisan eksak pada $\mathcal{L}$ −modul. Mengembangkan gagasan tentang aljabar homologi dimana obyek-obyeknya adalah $\mathcal{L}$ −modul bersama dengan $\mathcal{L}$ −homomorfismanya serta barisan eksak dari $\mathcal{L}$ −modul bersama dengan $\mathcal{L}$ −homomorfismanya.Manfaat dari penulisan ini adalah sebag ai berikut: Mengetahui perbandingan gagasan dalam teori modul biasa dengan teori dari $\mathcal{L}$ −modul. Jika aljabar homologi mungkin dilakukan dalam teori dari $\mathcal{L}$ −modul maka manfaatnya adalah mengetahui perbandingan gagasan aljabar homologi dalam teori modul biasa dan teori dari $\mathcal{L}$ −modul.

2. Pembahasan

2.1. $\mathcal{L}$ −modul, $\mathcal{L}$ −submodul dan $\mathcal{L}$ −homomorfisma

Berikut akn diberikan beberapa sifat terkait dengan gagasan $\mathcal{L}$-modul yaitu sebagai berikut.

Definisi 1.1. Sebuah $\mathcal{L}$-modul adalah R-modul M bersama dengan suatu submodunya.

Remark 1.2. Sebuah $\mathcal{L}$-modul dapat ditulis sebagai pasangan (M, U) dimana U adalah submodul dari M.

Contoh 1.3. Setiap R-modul M adalah $\mathcal{L}$-modul karena dapat dinyatakan sebagai pasangan (M, M) atau $(M, \{0\})$.

Remark 1.4. (M, M) akan dinamakan $\mathcal{L}$-modul tak-sejati dan $(M, \{0\})$ akan dinamakan $\mathcal{L}$-modul trivial sedangkan jika U adalah submodul sejati dari M maka pasangan (M, U) dinamakan $\mathcal{L}$-modul sejati.

Dalam teori modul biasa ada sebuah gagasan yang dinamakan dengan submodul dan R-homomorfisma, demikian dalam $\mathcal{L}$-modul juga akan ada gagasan yang dinamakan $\mathcal{L}$-submodul dan $\mathcal{L}$ −homomorfisma yaitu sebagai berikut:

Definisi 1.5. Diberikan $\mathcal{L}$-modul (M, U) dan A adalah submodul dari M. Pasangan $(A, A \cap U)$ membentuk $\mathcal{L}$-modul dan katakan ini sebagai $\mathcal{L}$-submodul.

Definisi 1.6. Pemetaan $\varphi: (M, U) \longrightarrow (N, V)$ dikatakan $\mathcal{L}$ −homomorfisma jika $\varphi: M \longrightarrow N$ adalah R-homomorfisma yang sifatnya $\varphi(U) \subseteq V$.

Contoh 1.7. Setiap R-homomofisma $\varphi: M \longrightarrow N$ adalah $\mathcal{L}$ −homomorfisma melalui pemetaan $\varphi: (M, \{0\}) \longrightarrow (N, N)$.

Contoh 1.8. R-homomorfisma nol $\varphi: M \longrightarrow N$ adalah $\mathcal{L}$ −homomorfisma melalui pemetaan $\varphi: (M, M) \longrightarrow (N, \{0\})$.

Definisi 1.9. Diberikan $\mathcal{L}$ −homomorfisma $\varphi: (M, U) \longrightarrow (N, V)$.
(i). $\mathcal{L}$ − kernel dari φ adalah $\mathcal{L}\,\mathrm{ker}\,\varphi = \{x \in M | \varphi(x) \in V\}$.
(ii). $\mathcal{L}$ − image dari φ adalah $\mathcal{L}\,\mathrm{im}\varphi = \{\varphi(x) \in N | x \in U\}$.

Definisi 1.10. Diberikan $\mathcal{L}$ −homomorfisma $\varphi: (M, U) \longrightarrow (N, V)$.
(i). φ dikatakan $\mathcal{L}$ −monomorfisma jika $\psi: M/U \longrightarrow N/V$ yang didefinisikan dengan $\psi(x + U) = \varphi(x) + V$ adalah R-monomorfisma.
(ii). ö dikatakan $\mathcal{L}$ −epimorfisma jika $\phi: U \longrightarrow V$ yang didefinisikan dengan $\phi(x) = \varphi(x)$ adalah R-epimorfisma.
(iii). φ dikatakan $\mathcal{L}$ − isomorfisma jika $\varphi: M \longrightarrow N$ adalah R-isomorfisma.

Teorema 1.11. $\mathcal{L}$ −homomorfisma $\varphi: (M, U) \longrightarrow (N, V)$ adalah $\mathcal{L}$ −monomorfisma jika dan hanya jika $\mathcal{L}\, ker\, \varphi = U$.
Bukti.
$\Longrightarrow$) Diketahui $\varphi: (M, U) \longrightarrow (N, V)$ adalah $\mathcal{L}$ −monomorfisma.
Ambil sembarang $x \in \mathcal{L}\, ker\, \varphi$.
Jelas $x \in M \ni \varphi(x) \in V$.
Jelas $\varphi(x) + V = V$.
Jelas $\psi(x + U) = \psi(0 + U)$.
Karena φ adalah $\mathcal{L}$ −monomorfisma, jelas $x + U = 0 + U = U$.
Jelas $x \in U$.
Jadi $\mathcal{L}\, ker\, \varphi \subseteq U$ …. (*).
Ambil sembarang $x \in U$.
Jelas $x + U = 0 + U = U$.
Jelas $\psi(x + U) = \psi(0 + U)$.

Jelas $\varphi(x) + V = V$.
Jelas $x \in M \ni \varphi(x) \in V$.
Jelas $x \in \mathcal{L}\, ker\, \varphi$.
Jadi $U \subseteq \mathcal{L}\, ker\, \varphi$ ….(**).
Dari (*) dan (**), diperoleh $\mathcal{L}\, ker\, \varphi = U$.

$\Leftarrow$). Diketahui $\mathcal{L}\, ker\, \varphi = U$.
Dibuktikan pemetaan $\psi: M/U \longrightarrow N/V$ yang didefinisikan dengan $\psi(x + U) = \varphi(x) + V$ adalah R-monomorfisma.
Ambil sembarang $x + U, y + U \in M/U$ yang sifatnya
$\psi(x + U) = \psi(y + U)$.
Jelas $\varphi(x) + V = \varphi(y) + V$.
Jelas $\varphi(x) - \varphi(y) \in V$.
Jelas $\varphi(x - y) \in V$.
Jelas $x - y \in \mathcal{L} \ker \varphi = U$.
Jelas $x - y \in U$.
Jelas $x + U = y + U$.
Jadi ψ adalah R-monomorfisma.
Jadi $\varphi: (M, U) \longrightarrow (N, V)$ adalah $\mathcal{L}$ −monomorfisma.

Teorema 1.12. $\mathcal{L}$ −homomorfisma $\varphi: (M, U) \longrightarrow (N, V)$ adalah $\mathcal{L}$ −epimorfisma jika dan hanya jika $\mathcal{L}\, \mathrm{im}\, \varphi = V$.

Bukti.

$\Rightarrow$). Diketahui $\varphi: (M, U) \longrightarrow (N, V)$ adalah $\mathcal{L}$ −epimorfisma.
Ambil sembarang $y \in \mathcal{L}\, \mathrm{im}\, \varphi$.
Jelas $y = \varphi(x)$ untuk suatu $x \in U$.
Karena φ adalah $\mathcal{L}$ −epimorfisma, jelas $y = \varphi(x) = \phi(x) \in V$.
Jelas $y \in V$.
Jadi $\mathcal{L}\, \mathrm{im}\, \varphi \subseteq V$ ….(*).
Ambil sembarang $y \in V$.
Karena φ adalah $\mathcal{L}$ −epimorfisma, jelas $\exists x \in U \ni \varphi(x) = y$.
Jelas $y \in \mathcal{L}\, \mathrm{im}\, \varphi$ ….(**).
Dari (*) dan (**), diperoleh $\mathcal{L}\, \mathrm{im}\, \varphi = V$.

$\Leftarrow$). Diketahui $\mathcal{L}\, \mathrm{im}\, \varphi = V$.
Ambil sembarang $y \in V$.
Jelas $y \in \mathcal{L}\, \mathrm{im}\, \varphi$.
Jelas $y = \varphi(x) = \phi(x)$ untuk suatu $x \in U$.
Jelas ϕ adalah epimorfisma.
Jadi $\varphi: (M, U) \longrightarrow (N, V)$ adalah $\mathcal{L}$ −epimorfisma.

Lemma 1.13. R-homomorfisma inklusi $i: A \longrightarrow M$ selalu mengimbas sebuah $\mathcal{L}$ −monomorfisma $i: (A, A \cap U) \longrightarrow (M, U)$.

Bukti.

Cukup dibuktikan bahwa pemetaan $\psi: A/A \cap U \longrightarrow M/U$ yang didefinisikan dengan $\psi(x + A \cap U) = x + U$ adalah R-monomorfisma.
Jelas $\ker \psi = \{x + A \cap U \,|\psi(x + A \cap U) \in \{U\}\}$

$$= \{x + A \cap U \,|x + U \in \{U\}\}$$
$$= \{x + A \cap U \,|x + U = U\}$$
$$= \{x + A \cap U \,|x \in U\}$$
$$= \{A \cap U\}$$

Jadi ψ adalah R-monomorfisma.

Jika diberikan $\mathcal{L}$ −modul (M, U) dan sebuah $\mathcal{L}$ −submodul $(A, A \cap U)$ maka dapat dibentuk sebuah $\mathcal{L}$ −modul faktor yaitu $(M/A, U/A \cap U)$ apabila $A \subseteq U$. Karena $A \subseteq U$ diperoleh $\mathcal{L}$ −modul faktornya yaitu:

$$(M/A, U/A)$$

Lemma 1.14. Pemetaan $\eta: (M, U) \longrightarrow (M/A, U/A)$ yang didefinisikan dengan $\eta(x) = x + A$ mendefiniskan sebuah $\mathcal{L}$ −epimorfisma.

Bukti.

Cukup dibuktikan pemetaan $\phi: U \longrightarrow U/A$ yang didefinisikan $\phi(x) = x + A$ adalah R-epimorfisma.

Pemetaan ini jelas R-epimorfisma karena pemataan ini adalah pemetaan natural (dalam teori modul biasa).

2.2. Fungtor Hom dan Fungtor Tensor dan Sifat-sifatnya

Selanjutnya akan dikonstruksi sebuah $\mathcal{L}$ −modul baru melalui ruang $\mathcal{L}$ −homomorfisma yaitu sebagai berikut:

Jika diberikan dua buah $\mathcal{L}$ −modul yaitu (M, U) dan (N, V) maka dapat dibentuk himpunan berikut:

$$Hom_{\mathcal{L}}\big((M, U), (N, V)\big) = \{f: M \longrightarrow N | f(U) \subseteq V\}$$

Himpunan tersebut juga bisa dipandang sebagai berikut:

$$Hom_{\mathcal{L}}\big((M, U), (N, V)\big) = \big(Hom_R(M, N), Hom_R(U, V)\big)$$

Bentuk kedua ini mengarah pada gagasan $\mathcal{L}$ −modul dan jelas bahwa himpunan ini membentuk $\mathcal{L}$ −grup abelian ($\mathbb{Z}$ −modul) terhadap operasi operasi penjumlahan fungsi biasa.

Teorema 1.15. Diberikan $\mathcal{L}$ −homomorfisma $\varphi: (M, U) \longrightarrow (N, V)$ dan sebuah $\mathcal{L}$ −modul (A, X). Jika $\varphi: (M, U) \longrightarrow (N, V)$ adalah $\mathcal{L}$ −monomorfisma maka pemetaan $\varphi^*: \big(Hom_R(A, M), Hom_R(X, U)\big) \longrightarrow \big(Hom_R(A, N), Hom_R(X, V)\big)$ yang didefinisikan dengan $\varphi^*(f) = \varphi f$ untuk setiap $f \in Hom_R(A, M)$ mendefinisikan $\mathcal{L}$ −monomorfisma.

Bukti.

Cukup dibuktikan bahwa $\mathcal{L} \ker \psi^* = Hom_R(X, U)$.

Jelas $\mathcal{L} \ker \psi^* = \{f \in Hom_R(A, M) | \psi^*(f) \in Hom_R(X, V)\}$

$$= \{f \in Hom_R(A, M) | \varphi f \in Hom_R(X, V)\}$$
$$= \big\{f \in Hom_R(A, M) \big| \varphi\big(f(x)\big), \forall x \in X\big\}$$

$$= \{f \in Hom_R(A,M) | f(x) \in \mathcal{L} \ker \varphi, \forall x \in X\}$$
$$= \{f \in Hom_R(A,M) | f(x) \in U, \forall x \in X\}$$
$$= \{f \in Hom_R(A,M) | f: X \longrightarrow U\}$$
$$= \{f \in Hom_R(A,M) | f \in Hom_R(X,U)\}$$
$$= Hom_R(X,U)$$

Jadi φ^* adalah $\mathcal{L}$ −monomorfisma.

Jika diberikan dua buah $\mathcal{L}$ −modul yaitu (M,U) dan (N,V) dan N serta U adalah R-modul flat maka dapat dibentuk $\mathcal{L}$ −modul berikut:

$$(M,U) \otimes_{\mathcal{L}} (N,V) = \big((M \otimes_R N), (U \otimes_R V)\big)$$

R-modul $U \otimes_R V$ menjadi submodul dari $M \otimes_R N$ melalui rantai R-monomorfisma berikut:

$$U \otimes_R V \longrightarrow U \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$$

Teorema 1.16. Diberikan $\mathcal{L}$ −homomorfisma $\varphi: (M,U) \longrightarrow (N,V)$ dan sebuah $\mathcal{L}$ −modul (A,X) dengan A, U dan V adalah R-modul flat. Jika $\varphi: (M,U) \longrightarrow (N,V)$ adalah $\mathcal{L}$ −epimorfisma maka pemetaan $\varphi': (M \otimes_R A, U \otimes_R X) \longrightarrow (N \otimes_R A, V \otimes_R X)$ yang didefinisikan dengan $\varphi'(m \otimes a) = \varphi(m) \otimes a$ mendefinisikan $\mathcal{L}$ −epimorfisma.
Bukti.
Cukup dibuktikan bahwa $\phi': U \otimes_R X \longrightarrow V \otimes_R X$ yang didefinisikan dengan $\phi'(u \otimes x) = \varphi(u) \otimes x$ mendefinisikan R-epimorfisma.
Ambil sembarang $c \in V \otimes_R X$.
Jelas $c = \sum v \otimes x$.
Karena φ adalah $\mathcal{L}$ −epimorfisma, jelas terdapat $u \in U \ni v = \varphi(u)$.
Jelas $c = \sum v \otimes x = \sum \varphi(u) \otimes x = (\varphi \otimes 1_X)(\sum u \otimes x)$.
Jadi ϕ' adalah R-epimorfisma.

3. Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan dari tulisan ini adalah sebagai berikut:$\mathcal{L}$ −modul, $\mathcal{L}$ −submodul dan $\mathcal{L}$ −homomorfisma serta sifat-sifatnya memiliki analogi dengan R-modul, R-submodul dan R-homomorfismanya mulai dari gagasan kernel, image serta monomorfisma dan epimorfismanya. Sifat dari fungtor Hom adalah melestarikan $\mathcal{L}$ −monomorfisma dan sifat dari fungtor tensor adalah melestarikan $\mathcal{L}$ −epimorfisma. Saran dari tulisan ini adalah sebagai berikut: Perlu dikembangkan lagi gagasan tentang hasil kali langsung, hasil tambah langsung eksternal dan hasil tambah langsung internal dari keluarga $\mathcal{L}$ −modul. Perlu dikembangkan lagi gagasan tentang barisan eksak, barisan eksak split dari $\mathcal{L}$ −modul. Perlu dikembangkan lagi gagasan tentang $\mathcal{L}$ −modul proyektif, $\mathcal{L}$ −modul injektif dan $\mathcal{L}$ −modul flat. Perlu dikembangkan lagi gagasan tentang aljabar homologi dari $\mathcal{L}$ −modul.

Daftar Pustaka

Adkins, W, 1992, *Algebra* : *An Introduction via Module Theory*, New York, Springer-Verlag.

Anvariyach, S. M, Davvas, B, 2005,*On Quasi-Exact Sequences,*Bull. Kurean Math. Soch. 42, No. 1, pp. 149-155.

Anvariyach, S. M, Davvas, B, *U-Split Exact Sequence,*__________________

Davvas, B, Parnian, 1999, *A Note on Exact Sequences,* Bulletin of the Malaysian Mathematical Society.

Davvas, B, Shabani, H, 2002, *A Generalization of Homological algebra*, J. Korean Math. Soch. 39(2002), No. 6, pp 881-898.

Fraleigh. J. B, 1999, *A First Course in Abstract Algebra*, Addison Wesle Longman.

Grillet. P. A, 2000, *Abstract Algebra*, New York, Springer.

Lane, S, M, *Categories fot the Working Mathematician*, New York, Springer.

Strooker, J. R, 1978, *Introduction to Categories, Homological Algebra and Sheaf Cohomology,* London, Cambridge University Press.