MENGKONSTRUKSI BUKTI GEOMETRI MELALUI KEGIATAN EKSPLORASI BERBANTU CABRI II PLUS

Samsul Maarif
Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA Jakarta
sams_andromeda@yahoo.com

ABSTRAK

Pembelajaran matematika harus mengalami perubahan dalam konteks perbaikan mutu pendidikan sehingga dapat meningkatkan hasil pembelajaran yang optimal. Peran bukti dalam pembelajaran geometri merupakan bagian sentral untuk memahami konsep-konsep geometri. Sehingga, perlu dikembangkan kepada siswa untuk mengkonstruksi bukti geometri. Untuk mengembangkan kemampuan mengkonstruksi bukti geometri dibutukhan suatu alat bantu untuk menjastifikasi ide bukti untuk dijadikan konjektur sehingga didapat suatu bukti formal. *Software Cabri Geometry II Plus* menyediakan layanan untuk mengkonstruksi titik, garis, segitiga, lingkaran dan geometri datar lainya lengkap dengan perhitungan-perhitungan terkait dengan geometri datar. Oleh karena itu, konsep abstrak pada geometri dapat di visualisasikan dengan *software Cabri Geometry II Plus* sehingga dalam mempelajari dan menganalisis konsep geometri akan pembelajar geometri akan lebih mudah memahaminya sehingga dapat dijadikan konjektur untuk selanjutnya dapat digunakan untuk mengkonstruksi bukti formal geometri.

Kata kunci: Geometri, Mengkonstruksi Bukti Geometri, *Cabri Geometry II Plus*

A. Pendahuluan

Perbaikan-perbaikan pembeajaran harus selalu dilakukan sebagai upaya meningkatkan kualitas pembelajaran matematika. Pembelajaran geometri yang melibatkan proses berpikir perlu dikembangkan sebuah kemampuan untuk membuktikan teorema-teorema geometri. Oleh karena itu, pengkajian tentang pembuktian geometri perlu dilakukan dalam pembelajaran geometri.Maarif (2015) mengungkapkan mempelajari matematika berarti akam mempelajari juga cabang dari matematika yaitu ilmu geometri. Semua yang ada di alam ini merupakan bangun geometri, sehingga matematika melalui cabangnya ilmu geometri mempelajari tentang konsep yang terkandung dalam benda-benda yang ada di alam ini melalui konsep-konsep geometri. Sehingga, pengkajian tentang pembelajaran geometri harus terus dikembangkan sehingga setiap pembelajar geometri mampu menganalisis benda-benda menjadi suatu konsep geometri dan dapat mengkonstruksi suatu pengetahuan geometri dengan pembuktian-pembuktian formal.

De Villiers (Marandes, 2010) menunjukkan, bukti memiliki beberapa fungsi yang tidak hanya pada proses verivikasi akan tetapi juga dapat dikembangkan dalam kemampuan matematis dengan menggunakan komputer: seperti penjelasan (memberikan informasi tentang mengapa itu benar), penemuan (*discovery* atau penemuan hasil baru) , komunikasi (negosiasi makna), tantangan intelektual (*self-realization*/ pemenuhan berasal dari membangun bukti), sistematisasi (organisasi berbagai hasil ke sistem deduktif aksioma, konsep dan teorema).

Knuth (2002) menyatakan peranan bukti sangat sentral dalam pembelajaran matematika sehingga reformasi kurikulum dengan menambahkan peranan pembuktian pada matematika tingkat sekolah menengah. Disamping itu penulis menemukan hasil-hasil penelitian sebelumnya yang menemukan bahwa siswa tingkat sekolah menegah mengalami kesulitan dalam menyusun bukti. Adapun pentingnya peranan memainkan bukti dalam pembelajaran matematika khususnya geometri. Adapun peranan memainkan bukti dalam pembelajaran matematika yaitu: 1) untuk memverivikasi bahwa sebuah pernyataan benar, 2) untuk menjelaskan mengapa sebuah pernyataan dapat dikatakan benar, 3) untuk membangun komunikasi matematik, 4) untuk menemukan atau membauat matematika baru dan 5) Untuk membuat sistemasisasi pernyataan dalam sistema aksiomatik.

Menurut Shanchesdan Sacristan (2003)mengungkapkan dalam kurun waktu beberapa tahun ini telah dilakukan beberpa penelitaian tentang peran teknologi dalam tahapan pengembangan bukti geometri dalam pembelajaran matematika. Penggunaan alat berupa teknologi membawa kemungkinan siswa dapat memahami berbagai konsep geometri yang dapat membantu siswa dalam membangun bukti geometri. Sebagian besar penelitian dikembangkan dengan melibatkan penggunaan teknologi berupa DGS (*Dynamic Geometri Software*) dalam mengembangkan bukti geometri (Marrioti &Balacheff, 2008;Marrioti, 2006;Jones, 2002), dan pada makalah yang akan disajikan akan diterangken beberapa contoh menyusun bukti geometri dengan menggunakan bantuan DGS.

Geometri adalah materi pelajaran matematika yang membutuhkan kemampuan matematis yang cukup baik untuk memahaminya. Menurut NCTM (Risnawati, 2012) kemampuan yang harus dimiliki siswa dalam mempelajari geometri adalah: 1) kemampuan menganalisis karakter dan sifat dari bentuk geometri baik dua dimensi ataupun tiga dimensi, dan mampu membangun argumen-argumen matematika mengenai hubungan geometri dengan yang lainnya; 2) kemampuan menentukan kedudukan suatu titik dengan lebih spesifik dan gambaran hubungan spasial dengan menggunakan koordinat geometri serta menghubungkannya dengan sistem yang lain; 3) kemampuan aplikasi transformasi dan penggunaannya secara simetris untuk menganalisis situasi matematis; 4) mampu menggunakan visualisasi, penalaran spasial, dan model geometri untuk memecahkan masalah. Dengan menguasai kemampuan-kemampuan tersebut, diharapkan penguasaan siswa terhadap materi geometri menjadi lebih baik.

Jika seseorang tidak menguasai konsep geometri yang abstrak maka secara otomatis tidak mampu menganalisis untuk mengkonstruksi suatu bukti. Karena, permulaan penyususnan suatu bukti seseorang harus memahami masalah yang dihadapi dan menggambarkannya dalam bentuk geometri. Risnawati (2012) menyatakan bahwa sesuai karakteristik geometri, proses abstraksi haruslah terintegrasi dengan proses pembelajaran yang berlangsung sehingga harus memperhatikan beberapa aspek seperti, metode pembelajaran, model pembelajaran, bahan ajar, ketersediaan dan penggunaan alat peraga atau ketrampilan guru dalam mengelola kegiatan pembelajaran. Pada pembelajaran geometri telah dilakukan perubahan secara menyeluruh dengan penggunaan DGS untuk mengajarkan bukti. Penggunaan DGS memiliki potensi untuk mendorong siswa dalam membangun bukti geometri. Dalam pembelajaran geometri siswa melakukan percobaan-percobaan melalui konstruksi geometri dan menyeret bangun geometri untuk diperoleh konstruksi yang berbeda sehingga menyimpulkan sifat-sifat bangun geometri yang telah dikonstruksi untuk menentukan teorema-teorema sehingga tercipta bukti deduktif.

Salah satu DGS yang dapat dimanfaatkan dalam pembelajaran untuk menyusun bukti geometri yaitu pemanfaatan *software Cabri Geometry II Plus* untuk pembelajaran geometri. Pada *software Cabri II Plus* menyediakan layanan untuk mengkonstruksi titik, garis, segitiga, lingkaran dan geometri datar lainya lengkap dengan perhitungan-perhitungan terkait dengan geometri. Oleh karena itu, konsep abstrak pada geometri dapat di visualisasikan dengan *software Cabri II Plus* sehingga dalam mempelajari dan menganalisis konsep geometri akan pembelajar geometri akan lebih mudah memahaminya sehingga siswa dapat menyusun bukti geometri. Disamping itu, perhitungan akurat pada *software Cabri II Plus*, memudahkan para pembelajar geometri untuk menganalisis masalah geometri dengan waktu yang lebih efektif. Sehingga dengan membelajarkan geometri melalui aplikasi *software Cabri II Plus* diharapkan dapat menciptakan pembelajaran yang lebih efektif.

Mariotti (2001) mengungkapkan mengungkapkan konstruksi geometri merupakan bagian yang penting sebagai pengalaman siswa yang harus diorganisir. Adapun dalam pembelajaran peneliti menitik beratkan pada praktik siswa yang terdiri dari pengalaman siswa dalam menggambarkan bangun geometri yang ditimbulkan oleh:

a. Benda konkrit seperti gambar bangun geometri yang dituliskan di kertas dengan pensil, penggaris dan busur derajat.
b. Penghitungan objek geometri yang dilakukan oleh *Cabri Geomtry* untuk eksplorasi

Perkembangan siswa dalam memunculkan *justifikasi* (pembenaran) geometri dengan mengkonstruksi bangun geometri menggunakan *Cabri Geomtry* melalui langkah-langkah: diskripsi dari solusi, pembenaran solusi, membenarakn menurut aturan aksioamatis geometri.

Pembelajaran geometri yang dilakukan dengan hanya menggunakan pensil dan kertas dalam perspektif teori geometri sulit untuk dipahami. Ketika siswa menggambar dikertas siswa hanya dapat memfokuskan kepada gambar yang sedang dikonstruksi dan tidak dapat memanipulasinya. Oleh karena itu, penggunaan *Cabri Geomtry* dapat mempermudahkan siswa untuk menggambarkan bangun geometri sekaligus memanipulasinya sehingga ekplorasi geometri lebih maksimal. Kegiatan eksplorasi membantu siswa untuk memahami konsep teorema geometri.

Nurhasanah (2010) menyatakan bahwa sesuai karakteristik geometri, proses abstraksi haruslah terintegrasi dengan proses pembelajaran yang berlangsung sehingga harus memperhatikan beberapa aspek seperti, metode pembelajaran, model pembelajaran, bahan ajar, ketersediaan dan penggunaan alat peraga atau ketrampilan guru dalam mengelola kegiatan pembelajaran.

Kehadiran media mempunyai peran yang penting dalam proses pembelajaran matematika yang objek kajiannya bersifat abstrak (termasuk materi geometri), terutama media yang dapat mengatasi permasalahan dalam pembelajaran geometri. Dewasa ini media pembelajaran berbasis komputer telah berkembang pesat. Patsiomitou (Maarif, 2014) menyatakan bahwa pembelajaran geometri dengan bantuan *software* geometri misalnya *Cabri Geometry* ada empat hal yang dapat dicapai siswa, yaitu; (1) siswa dapat membangun kemampuan pemecahan masalah dengan menggunakan *software,* (2) membangun skema mental melalui konstruksi dengan menggunakan skema, (3) meningkatkan kemampuan reaksi visual mealalui kegiatan representasi visual, dan (4) membangun proses pemikiran mengenai geometri.

Cabri II plus adalah sebuah software yang bisa digunakan secara interaktif untuk pemelajaran geometri dan bisa digunakan oleh guru maupun mahasiswa (*cabrilog*). Beberapa hal yang dapat digunakan oleh cabri geometri II plus adalah mengkonstruksi gambar sama seperti apa yang bisa dilakukan oleh penggaris, pensil, jangka, dan lain-lain sehingga hasilnya bisa lebih akurat, dapat dimanipulasi dengan mudah hanya dengan mengklik tool yang ada aplikasi, selain itu gambar dapat selalu di update kapan saja. Sistem operasi yang dapat digunakan untuk menggunakan software ini adalah sistem operasi yang berbasis windows, diantaranya windows 98, 98SE, ME, 2000, dan XP. *Cabri II plus* tersedia dalam beberapa versi bahasa diantaranya, Inggris, Jerman, Prancis, Spanyol, Belanda, Italia, Portugis, Jepang, Cina, Norwegia dan beberapa bahasa asing lainnya. Beberapa situs internet menyediakan program ini secara gratis untuk di-*download*. Menurut Cabrilog beberapa keunggulan yang dimiliki oleh *Cabri Geometry* dibandingkan dengan *software-software* sejenis dan versi sebelumnya adalah:

a. Antar muka (*interface*) yang lebih mudah dipahami dan digunakan (*user friendly*) dan lebih sederhana. *Cabri Geometry* memiliki tampilan yang mirip dengan *software office* yang dikeluarkan *Microsoft*, dimana menu terdapat struktur antar muka seperti *file*, *edit*, *options*, *window*, *help* dan lain-lain.
b. *Icon-icon* yang lebih baik dan jelas sehinga mudah untuk digunakan
c. Perangkat tambahan disediakan untuk memberikan nama pada setiap objek dengan jenis dan ukuran *font* yang lengkap, selain itu angka dan equations dapat disisipkan diantara teks dan lembar kerja.
d. Mampu menambahkan gambar pada titik, segmen, segitiga dan segiempat.
e. Beberapa garis sketsa pembentuk gambar dapat dihilangkan sehingga gambar yang dibuat lebih jelas.
f. Gambar bisa diimpor dari dan ke file lain yang sejenis.

B. Pembuktian Geomtri

Menurut Bell (1987) Secara umum, sebuah pembuktian adalah sembarang argument atau presentasi dari bukti-bukti yang meyakinkan atau membujuk seseorang untuk menerima suatu keyakinan. Setidaknya enam kriteria yang dapat diidentifikasi untuk meyakinkan diri atau orang lain untuk menerima sebuah argumen sebagai pembuktian yang meyakinkan yaitu:*Personal experience, acceptane of authority, observations of intances, lack of a counterexample, the usefulness of result, deductive argument*.

Metode keenam dalam pembuktian yaitu*deductive argument* yang merupakan metode paling banyak diterima dengan baik dalam pembuktian matematika. Apabila ada sebuah pernyataan atau keyakinan yang berlandaskan pada salah satu dari kelima metode yang sebelumnya (*personal experience, acceptance of authority, observations of instances, lack of a counter-example,* dan *usefulness of result*) menyatakan salah maka argument terkuat ada pada *deductive argument*. Bagaimanapun, sebuah kesimpulan yang berlandaskan pada *deductive argument* dan menyatakan kebenaran maka hasilnya adalah benar.

Menurut Setya Budi (2006) untuk membuktikan sebuah pernyataan $p \rightarrow q$ bernilai benar jika *p* bernilai benar untuk *p* dan *q* adalah sebuah pernyataan matematis dapat dilakukan dengan beberapa cara:

1. Pembuktian langsung

Untuk metode pembuktian bentuk ini dapat dilakukan dengan mengasumsikan pernyataan *p* (sebagai sebab) bernilai benar. Kemudian dengan menggunakan pernyataan implikasi (Jika *p* maka *q*) perlihatkan bahwa untuk pernyataan *q* juga bernilai benar. Menurut logika matematika penarikan kesimpulan seperti itu disebut dengan penarikan kesimpulan dengan *silogisme*, yaitu:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Berikut contoh pembuktian langsung pada materi geometri:

Pernyataan	Nilai Kebenaran
Contoh: Buktikan bahwa Jika sebuah segitiga memiliki dua buah sisi yang sama garis tinggi pada alas merupakan garis bagi sudut dan garis sumbu.	
Premis 1: Jika sebuah segitiga memiliki dua buah sisi yang sama maka segitiga itu disebut segitiga sama kaki ($p \rightarrow q$)	Benar
Premis 2: Jika ada sebuah segitiga sama kaki maka garis tinggi pada alas merupakan garis bagi sudut dan garis sumbu ($q \rightarrow r$)	Benar
Kesimpulan: Jika sebuah segitiga memiliki dua buah sisi yang sama maka garis tinggi pada alas merupakan garis bagi sudut dan garis sumbu ($p \rightarrow r$)	Benar

2. Pembuktian tak langsung dengan kontrapositif

Pembuktian langsung dengan kontrapositif yaitu sebuah pernyataan $\neg q \rightarrow \neg p$. Sehingga pembuktian kontrapositif dilakukan dengan membuktikan secara langsung bahwa $\neg q$ benar maka $\neg p$ juga benar. Berikut contoh pembuktian materi geometri dengan menggunakan pembuktian kontrapositif: "Buktikan jika garis *a* // *b* dan garis *b* // *c* maka garis *a* // *b*"

Diketahui bahwa,

Premis 1: garis *a* // *b* dan garis *b* // *c* ($p \rightarrow q$)

Premis 2: garis *a* // *b* (r)

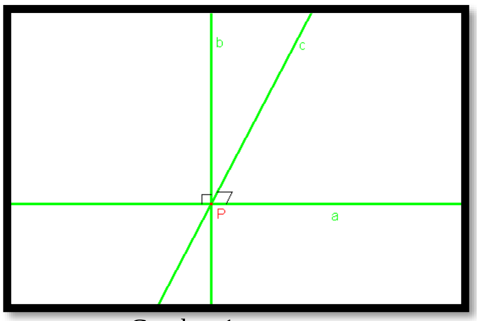
Mulailah dengan memisalka *a* tidak sejajar garis *b* sehingga garis *a* berpotongan dengan garis *b* di titik P ($\neg r$). Sehingga menurut teorema *play fair* dapat ditarik satu garis sejajar *a* melalui titik P. Dan itu artinya garis *b* berpotongan dengan garis *c* di titik P { $p \wedge \neg q \equiv \neg(p \rightarrow q)$ }.

3. Pembuktian dengan kontradiksi

Pembuktian dengan kontradiksi dilakukan dengan memisalkan sebuah pernyataan yang ingin dibuktikan adalah salah. Sehingga, jika menginginkan sebuah pembuktian pernyataan $p \rightarrow q$, maka terlebih dahulu mengasumsikan bahwa pernyataan $p \rightarrow q$ bernilai salah. Setelah memislakna $p \rightarrow q$ bernilai salah jabarkan asumsi tersebut sehingga terdapat penyangkal asumsi tersebut.Berikut contoh pembuktian materi geometri dengan menggunakan pembuktian kontradiktif: "Buktikan bahwa hanya ada satu garis tegak lurus terhadap sebuah garis melalui sebuah titik"

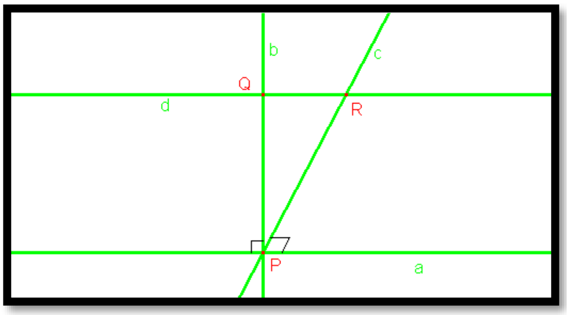
Bukti kontradiktif:

Misalkan terdapat dua buah garis $\perp a$ melalui titik P yaitu masing masing garis *c* dan *d* seperti terlihat pada sketsa gambar berikut.



Gambar 1

Ambil sebuah titik Q pada garis *b* kemudian tentukan gari *d* // *a* melalui titi Q sehingga memotong garis *c* di titik R. Kerena garis *a* dan garis *b* berbeda maka terkonstruksi sebuah ΔABC. Seperti tampak pada sketsa gambar berikut.



Gambar 2

>> Lihat ΔABC

$\angle PQR = 90^0$ karena d // a dipotong oleh garis b sehingga membentuk sudut dalam sepihak.

$\angle PRQ = 90^0$ karena d // a dipotong oleh garis c sehingga membentuk sudut dalam sepihak.

Sehingga,

$$\angle PQR + \angle PRQ + \angle QPR = 90^0 + 90^0 + \angle QPR = 180^0 + \angle QPR > 180^0$$

Hal tersebut bertentangan dengan teorema jumlah sudut dalam segitiga yaitu sama dengan 180^0. Artinya asumsi bahwa terdapat dua buah garis tegak lurus dengan garis *a* melalui titik P salah.

Kesimpulanya: Buktikan bahwa hanya ada satu garis tegak lurus terhadap sebuah garis melalui sebuah titik.

C. Mengkonstruksi Bukti Geometri dengan Kegiatan Eksplorasi Menggunakan *Cabri II Plus*

Untuk bagian ini akan dijelaskan beberapa contoh penerapan s*oftware Cabri Geometry II Plus*dalam mengkonstruksi bukti geometri. Dibawah ini akan dibahas beberapa pebuktian teorema yang kemudian di konstruksi dengan menggunakan *software Cabri Geometry II Plus*dan siswa kemudian menentukan nilai kebenaran darisebuah teorema tersebut. Berikut beberapa contoh pembelajaran geometri terkait konstruksi bukti dan beberapa visualisasi geometri.

1. Pembuktian Teorema Luas Daerah Segiempat dengan Pendekatan Keliling Segiempat

Untuk mengeksplorasi teorema luas daerah segitiga dengan pendekatan keliling segitiga dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut:

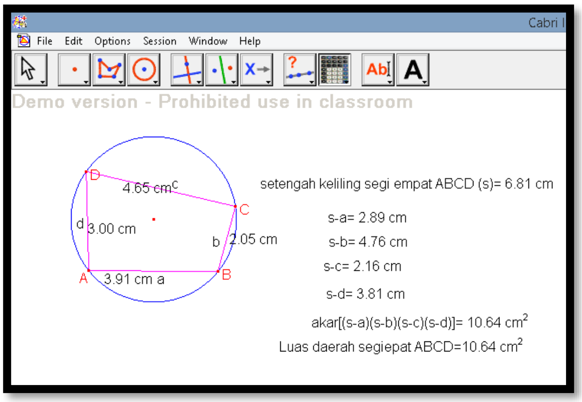
a. Dengan menggunakan tombol *circle* pada *toolbar* buatlah sebuah lingkaran. Tentukan titik A, B, C dan D pada lingkarang dengan menggunakan tombol *point on object* pada *toolbar*.

b. Buatlah segiempat ABCD dengan menggunakan tombol *polygon* pada *toolbar*. Selanjutanya beri nama sisi AB, BC, CD, dan AD masing-masing dengan *a*, *b*, *c*, dan *d* dengan tombol *label*.

c. Kemudian tentukan panjang masing-masing sisi segiempat ABCD dengan tombol *distance or length* pada *toolbar*. Tentukan setengah keliling segiempat ABCD dengan menggunakan tombol *calculate* pada *toolbar*.

d. Dengan tombol *calculate* tentukan akar dari perkalian selisih antara "*s*"dengan tiap-tiap sisi segitiga.

e. Tentukan akar dari perkalian selisih antara "*s*"dengan tiap-tiap sisi segiempatdengan tombol *area* pada *toolbar*.Tentukan juga luas daerah segiempat ABCD.Terlihat bahwa nilai luas daerah segiempat akan sama dengan akar dari perkalian selisih antara "*s*"dengan tiap-tiap sisi segiempat.

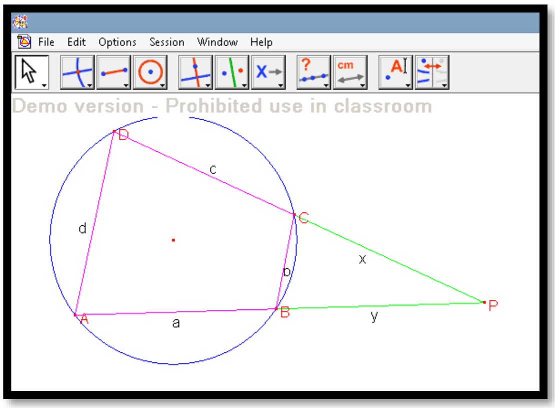


Gambar 3

f. Apakah hal itu berlaku pada kondisi lain, kita dapat men-*draging* salah satu titik pada segiempat ABCD.

g. Ternyata luas daerah segiempat tetap sama dengan akar dari perkalian selisih antara "*s*"dengan tiap-tiap sisi ssegiempaa.

h. Selanjutnya kita dapat melakukan perhitungan secara aljabar untuk membuktikan luas daerah segiempa dengan pendekatan keliling. Lihatlah gambar berikut.



Gambar 4

>> Lihat $\Delta BP($ dan $\Delta BP($

Keran $\Delta BP($ sebangun dengan $\Delta BP($ maka,

$$\frac{x}{a+y}=\frac{y}{c+x}=\frac{b}{d}$$

Ambil $\frac{x}{a+y}=\frac{b}{d}$, sehingga:

$$\frac{x}{a+y}=\frac{b}{d} \quad => \quad dx=ab+by$$

$$dx-by=ab.......persamaan\,(i)$$

Ambil $=\frac{y}{c+x}=\frac{b}{d}$, sehingga:

$$\frac{y}{c+x}=\frac{b}{d} \quad => \quad dy=bc+bx$$

$$-bx+dy=bc.......persamaan\,(ii)$$

Dari *persamaan* (*i*) dan *persamaan* (*ii*) didapat:

$$\begin{array}{rl|l} dx-by=ab & \times d & d^2x-bdy=abd \\ -bx+dy=bc & \times b & -b^2x+bdy=b^2c+ \\ \hline & & (d^2-b^2)x=abd+b^2c \end{array}$$

$$x=\frac{abd+b^2c}{d^2-b^2}$$

$$x=\frac{b(ad+bc)}{d^2-b^2}$$

Misalkan: $\frac{ad+bc}{d^2-b^2}=k$, maka $x = bk$……..*persamaan* (*iii*)

$$\begin{array}{l|l} dx - by = ab & \times b \\ -bx + dy = bc & \times d \end{array} \qquad \begin{array}{l} bdx - b^2 y = ab^2 \\ -bdx + d^2 y = bcd \quad + \\ \hline (d^2 - b^2) y = ab^2 + bcd \end{array}$$

$$y = \frac{ab^2 + bcd}{d^2 - b^2}$$

$$y = \frac{b(ab + cd)}{d^2 - b^2}$$

Misalkan: $\frac{ab + cd}{d^2 - b^2} = l$, maka $x = bl$……….*persamaan* (*iv*)

Dari $\frac{x}{a + y} = \frac{b}{d}$ didapat $a + y = \frac{dx}{b}$ dan dari $\frac{y}{c + x} = \frac{b}{d}$ didapat $c + x = \frac{dy}{b}$

sehingga,

$$\frac{L\Delta BCP}{L\Delta ADP} = \frac{\frac{1}{2} xy \sin \angle P}{\frac{1}{2}(a + y)(c + x) \sin \angle P}$$

$$= \frac{xy}{(a + y)(c + x)}$$

$$= \frac{xy}{\frac{dx}{b} \cdot \frac{dy}{b}}$$

$$= \frac{xy}{\frac{d^2 xy}{b^2}}$$

$$= \frac{b^2}{d^2}$$

$$\frac{L\Delta BCP}{L\Delta ADP} = \frac{b^2}{d^2}$$

$$L\Delta ADP = \frac{d^2}{b^2} \times L\Delta BCP$$

$$Luas\ daerah\ segiempat\ ABCD = L\Delta ADP - L\Delta BCP$$

$$= \frac{d^2}{b^2} \times L\Delta BCP - L\Delta BCP$$

$$= \left(\frac{d^2}{b^2} - 1 \right) \times L\Delta BCP \ldots\ldots\ldots persamaan\ (v)$$

Lihat ΔBCP Lihat dengan sisi-sisinya x, y dan b sehingga

$$\Delta BCP = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-b)} \quad untuk\; s = \frac{1}{2}(x+y+b)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x+y+b}{2}\right)\left(\frac{x+y+b}{2}-x\right)\left(\frac{x+y+b}{2}-y\right)\left(\frac{x+y+b}{2}-b\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x+y+b}{2}\right)\left(\frac{x+y+b-2x}{2}\right)\left(\frac{x+y+b-2y}{2}\right)\left(\frac{x+y-2b}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x+y+b}{2}\right)\left(\frac{x+y+b-2x}{2}\right)\left(\frac{x+y+b-2y}{2}\right)\left(\frac{x+y-2b}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x+y+b}{2}\right)\left(\frac{y-x+b}{2}\right)\left(\frac{x-y+b}{2}\right)\left(\frac{x+y-b}{2}\right)} \text{.........}persamaan\,(vi)$$

Substitusikan *persamaan* (*iii*) dan *persamaan* (*iv*) ke dalam *persamaan* (*vi*)

$$L\Delta BCP = \sqrt{\left(\frac{x+y+b}{2}\right)\left(\frac{y-x+b}{2}\right)\left(\frac{x-y+b}{2}\right)\left(\frac{x+y-b}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{bk+bl+b}{2}\right)\left(\frac{bl-bk+b}{2}\right)\left(\frac{bk-bl+b}{2}\right)\left(\frac{bk+bl-b}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b(k+l+1)}{2}\right)\left(\frac{b(l-k+1)}{2}\right)\left(\frac{b(k-l+1)}{2}\right)\left(\frac{b(k+l-1)}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b(k+l+1)}{2}\right)\left(\frac{b(l-k+1)}{2}\right)\left(\frac{b(k-l+1)}{2}\right)\left(\frac{b(k+l-1)}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{b(k+l+1)}{2}\cdot\frac{b(l-k+1)}{2}\cdot\frac{b(k-l+1)}{2}\cdot\frac{b(k+l-1)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^4}{16}(k+l+1)(l-k+1)(k-l+1)(k+l-1)}$$

$$= \frac{b^2}{4}\sqrt{(k+l+1)(l-k+1)(k-l+1)(k+l-1)} \text{............}persamaan\,(vii)$$

Sebelumnya kita ketahui bahwa $\frac{ad+bc}{d^2-b^2} = k$ dan $\frac{ab+cd}{d^2-b^2} = l$ sehingga,

$$k+l+1 = \frac{ad+bc}{d^2-b^2} + \frac{ab+cd}{d^2-b^2} + 1$$

$$= \frac{a(d+b)+c(d+b)}{d^2-b^2} + 1$$

$$= \frac{a+c}{d-b} + \frac{d-b}{d-b}$$

$$= \frac{a+c+d-b}{d-b} \text{.......}persamaan\,(viii)$$

$$
\begin{aligned}
l-k+1 &= \frac{ab+cd}{d^2-b^2}-\frac{ad+bc}{d^2-b^2}+1\\
&= \frac{ab+cd-ad-bc}{d^2-b^2}+1\\
&= \frac{-a(d-b)+c(d-b)}{d^2-b^2}+1\\
&= \frac{(d-b)(c-a)}{d^2-b^2}+1\\
&= \frac{(d-b)(c-a)}{(d+b)(d-b)}+1\\
&= \frac{c-a}{d+b}+1\\
&= \frac{c-a}{d+b}+\frac{d+b}{d+b}\\
&= \frac{c-a+d+b}{d+b}\\
&= \frac{c+b+d-a}{d+b} \text{ ....} persamaan\ (ix)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k-l+1 &= -(l-k)+1\\
&= -\left(\frac{c-a}{d+b}\right)+1\\
&= \frac{a-c}{d+b}+1\\
&= \frac{a-c}{d+b}+\frac{d+b}{d+b}\\
&= \frac{a-c+d+b}{d+b}\\
&= \frac{a+b+d-c}{d+b} \text{ ......} persamaan\ (x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k+l-1 &= \frac{a+c}{d-b}-1\\
&= \frac{a+c}{d-b}-1\\
&= \frac{a+c}{d-b}-\frac{d-b}{d-b}\\
&= \frac{a+c-d+b}{d-b}\\
&= \frac{a+b+c-d}{d-b} \text{ ....} persamaan\ (xi)
\end{aligned}
$$

Substitusikan nilai *k* dan *l* ke dalam *persamaan* (*viii*), *persamaan* (*ix*), *persamaan* (*x*) dan *persamaan* (*xi*) ke dalam *persamaan* (*vii*), sehingga

$$
\begin{aligned}
L\Delta BPC &= \frac{b^2}{4}\sqrt{(k+l+1)(l-k+1)(k-l+1)(k+l-1)}\\
&= \frac{b^2}{4}\sqrt{\left(\frac{a+c+d-b}{d-b}\right)\left(\frac{b+c+d-a}{d+b}\right)\left(\frac{a+b+d-c}{d+b}\right)\left(\frac{a+b+c-d}{d-b}\right)}\\
&= \frac{b^2}{4}\sqrt{\frac{(a+c+d-b)(b+c+d-a)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}{\left(d^2-b^2\right)^2}}\\
&= \frac{b^2}{4d^2-b^2}\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}\\
&\qquad \text{........} persmaan\ (xii)
\end{aligned}
$$

Diketahui bahwa

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$$
$$2s=a+b+c+d$$

$$2s-a=b+c+d$$
$$2s-b=a+c+d$$
$$2s-c=a+b+d$$
$$2s-d=a+b+c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots persamaan\ (xiii)$$

Substitusikan *persamaan* (*xiii*) ke dalam *persamaan* (*xii*), sehingga didapat

$$L\Delta BPC=\frac{b^2}{4d^2-b^2}\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}$$
$$=\frac{b^2}{4d^2-b^2}\sqrt{(2s-a-a)(2s-b-b)(2s-c-c)(2s-d-d)}$$
$$=\frac{b^2}{4d^2-b^2}\sqrt{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}$$
$$=\frac{b^2}{4d^2-b^2}\sqrt{2(s-a)2(s-b)2(s-c)2(s-d)}$$
$$=\frac{b^2}{4d^2-b^2}\sqrt{16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$=\frac{b^2}{d^2-b^2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \ldots\ldots\ldots persamaan\ (xiv)$$

Substitusikan *persamaan* (*xiv*) ke dalam *persamaan* (*v*), sehingga didapat

$$Luas\ daerah\ segiempat\ ABCD=L\Delta ADP-L\Delta BCP$$
$$=\frac{d^2}{b^2}\times L\Delta BCP-L\Delta BCP$$
$$=\left(\frac{d^2}{b^2}-1\right)\times\frac{b^2}{d^2-b^2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$=\frac{d^2-b^2}{b^2}\times\frac{b^2}{d^2-b^2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

i. Tapi perlu diingat bahwa Teorema ini hanya berlaku untuk segi empat tali busur.
j. Sehingga terbukti bahwa ternyata luas daerah segiempat= $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, untuk "*s*"adalah setengah keliniling segitiga dan *a*, *b*, *c* dan *d* masing-masing sisi segiempat.

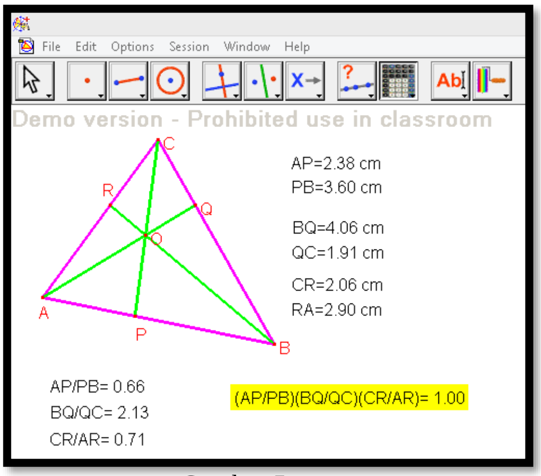
2. Pembuktian Teorema Ceva

Sebelum kita mengeksplorasi teorema Ceva terlebih dahulu kita mengetahui isi dari teorema Ceva, yaitu: "**Jika terdapat sebuah segitiga ABC dengan titik P, Q dan R masing-masing pada sisi AB, BC dan AC, maka berlaku:** $\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RA}=1$

dengan syarat AQ, BR dan CP berpotongan di satu titik".

Untuk mengeksplorasi teorema Ceva terlebih dahulu kita dapat mengkonstruksi menggunakan *cabri II plus* dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Buatlah segitiga ABC menggunakan tombol *triangle* pada *toolbar*.
b. Tentukan titik O pada *interior* segitiga ABC.
c. Gunakan tombol *line* pada *toolbar* untuk menentukan garis yang melalui titik A dan titik O. tentukan titik potong garis itu menggunkan tombol *intersection point*, beri nama titik potong itu dengan titik Q.
d. Dengan cara yang sama buat garis melalui titik B dan titik O serta garis melalui titik C dan titik O. Kemudian tentukan titik potong dengn sisi-sisi segitiga, beri nama titik itu dengan titik P dan Q.
e. Hilangkan garis-garis yang melalui titik O menggunakan tombol *hide/show* pada *toolbar*.
f. Selanjutnya tentukan segmen AQ, BR dan CP menggunakan tombol *segment* pada *toolbar*.
g. Tentukan panjang AQ, BQ, CR, AR, CP, dan BP menggunakan tombol *distance or length* pada *toolbar*.
h. Gunakan tombol *calculate* pada *toolbar* lakukan perhitungan menentukan perbandingan $\frac{AP}{PB}, \frac{BQ}{CQ}$ dan $\frac{CR}{AR}$.
i. Tentukan perkalian $\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RA}$ menggunakan tombol *calculate* pada *toolbar*.

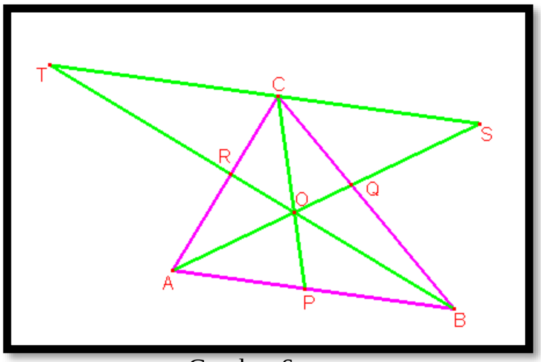


Gambar 5

j. Ternyata hasil perkalianya sesuai dengan teorema Ceva yaitu $\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RA}=1$.

k. Apakah kondisi itu berlaku untuk kondisi yang lain, geser titik O dengan men-*dragging*. Ternyata hasil kali perbandinganya masih tetap.

l. Selanjutnya lakukan pembuktian dengan sistem aksiomatis gemetri. Lihat gambar berikut ini.



Gambar 6

>>Lihat ΔCRT dan ΔARB

$\angle CTR = \angle ABR$ (Sudut dalam berseberangan)

$\angle TCR = \angle RAB$ (Sudut dalam berseberangan)

$\angle TRC = \angle ARB$ (Sudut bertolak belakang)

$\therefore \Delta CRT$ sebangun dengan ΔARB $(Sd.Sd.Sd)$, sehingga

$\frac{CR}{RA}=\frac{TC}{AB}$ ....persamaan (i)

>>Lihat ΔCQS dan ΔABQ

$\angle CSQ = \angle BAQ$ (Sudut dalam berseberangan)

$\angle QCS = \angle ABQ$ (Sudut dalam berseberangan)

$\angle CQS = \angle AQB$ (Sudut bertolak belakang)

$\therefore \Delta CQS$ sebangun dengan ΔABQ $(Sd.Sd.Sd)$, sehingga

$\frac{QC}{BQ}=\frac{CS}{AB}$ atau $\frac{BQ}{CQ}=\frac{AB}{C}$ ....persamaan (ii)

>>Lihat ΔAOP dan ΔCOS

$\angle OAP = \angle OSC$ (Sudut dalam berseberangan)

$\angle APO = \angle SCO$ (Sudut dalam berseberangan)

$\angle AOP = \angle COS$ (Sudut bertolak belakang)

$\therefore \Delta AOP$ sebangun dengan ΔCOS $(Sd.Sd.Sd)$, sehingga

$$\frac{AP}{CS}=\frac{OP}{CO} \ldots \text{persamaan } (iii)$$

>>Lihat ΔBOP dan ΔCOT

$\angle OBP = \angle OTC$ (Sudut dalam berseberangan)

$\angle BPO = \angle TCO$ (Sudut dalam berseberangan)

$\angle BOP = \angle COT$ (Sudut bertolak belakang)

$\therefore \Delta BOP$ sebangun dengan ΔCOT $(Sd.Sd.Sd)$, sehingga

$$\frac{PB}{CT}=\frac{OP}{CO} \ldots \text{persamaan } (iv)$$

Dari *pernyataan* (*iii*) dan *pernyataan* (*iv*) didapat,

$$\frac{AP}{CS}=\frac{OP}{CO}=\frac{PB}{CT} \Rightarrow \frac{AP}{PB}=\frac{CS}{CT} \ldots\ldots \text{persamaan } (v)$$

Dari *pernyataan* (*i*), *pernyataan* (*ii*) dan *pernyataan* (*iv*) didapat,

$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RA}=\frac{CS}{CT}\times\frac{AB}{CS}\times\frac{CT}{AB}=1$$

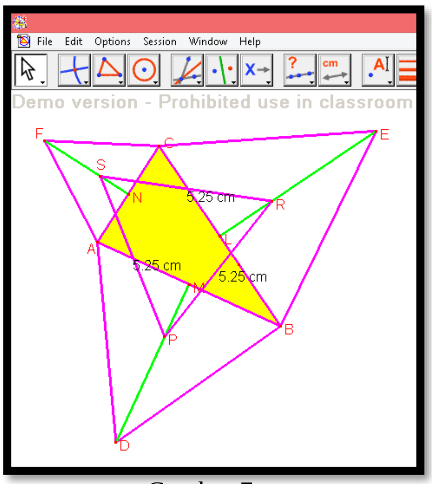
Terbukti bahwa teorema Ceva berlaku.

3. Pembuktian Teorema Napoleon

Teorema Napolean, yaitu: "**Terdapat sebuah segitiga ABC dibuat segitiga-segitiga sama sisi pada ketiga buah sisinya, jika pusat lingkaran luar segitiga itu dihubungkan satu sama lain maka akan terbentuk sebuah segitiga sama sisi".** Untuk mengeksplorasi teorema Napoleon terlebih dahulu kita dapat mengkonstruksi menggunakan *cabri II plus* dengan langkah-langkah sebagai berikut:

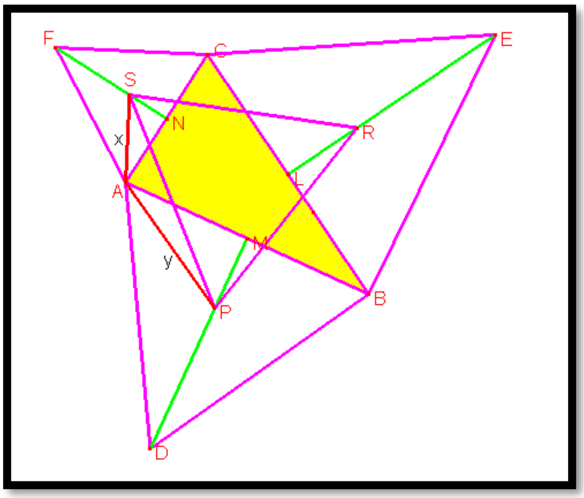
a. Buatlah segitiga ABC menggunakan tombol *triangle* pada *toolbar.*
b. Beri warna segitiga ABC itu menggunakan tombol *fill* pada *toolbar*.
c. Buatlah segitiga sama sisi ABE dengan cara buat lingkaran dengan pusat di titik A dan jari-jari sepanjang AB *circle* pada *toolbar.*
d. Tentukan sebuah lingkaran dengan pusat di titik B dan jari-jari sepanjang AB *circle* pada *toolbar.*
e. Lanjutkan dengan menentuka titik potong dua buah lingkaran tersebut, beri nama titik potong itu dengan titik D.
f. Buat garis tegak lurus AB melalui titik D menggunakan tombol *perpendicular line*. Tentukan titik potong garis tersebut dengan sisi AB.
g. Beri nama titik potong tersebut dengan titik M.
h. Selanjutnya byuat segmen DM menggunakan tombol *segment* pada *toolbar*.

i. Sembunyikan garis tegak lurus AB dan lingkaran dari lembar kerja *cabri II plus* menggunakan tombol *hide/show* pada *toolbar*.
j. Gunakan cara yang sama untuk mengkonstruksi segitiga sama sisi pada sisi BC dan AC.
k. Tentukan garis bagi sudut pada segitiga ABD menggunakan *angle bisector* pada *toolbar*.
l. Tentukan titik potong garis bagi sudut tersebut menggunakan tombol *intersection point* pada *toolbar*, beri nama dengan titik P.
m. Sembunyikan garis bagi yang telah dikonstruksi dari lembar kerja *cabri II plus* menggunakan tombol *hide/show.*
n. Titik P adalah pusat lingkaran dalam segitiga ABD.
o. Gunakan cara yang sama untuk menentukan titik pusat lingkaran dalam segitiga BCE dan segitiga ACF, masing-masing di titik R dan S.
p. Buatlah segitiga PRS menggunakan tombol *triangle* pada *toolbar*. Segitiga PRS adalah segitiga sama sisi.
q. Untuk meyakinkan bahwa segitiga PRS adalah segitiga sama sisi, kita dapat menentukan panjang dari masing-masing segitiga PRS menggunakan tombol *distance or length* pada *toolbar*.
r. Terlihat bahwa panjang setiap sisi segitiga PRS sama.
s. Apakah kondisi itu berlaku untuk kondisi yang lain, kita dapat menggeser titik sudut segitiga ABC dengan cara men-*draging* titik sudut tersebut.



Gambar 7

t. Ternyata segitiga PRS tetap sebagai segitiga sama sisi.
u. Selanjutnya lakukan pembuktian dengan sistem aksiomatis gemetri. Lihat gambar berikut ini.



Gambar 8

>>Lihat ΔABD

ΔABD adalah segitiga sama sisi sehingga besartiap-tiap sudutnya adalah 60^0. AP adalah garis bagi $\angle DAB$ maka $\angle PAB = \angle PAD = \frac{1}{2}\angle DAB = 30^0$

>>Lihat ΔPAB

ΔPAB adalah segitiga sama kaki sehingga $\angle PAB = \angle PBA = 30^0$ dan $\angle APB = 60^0$. Dengan menggunakan aturan Sinus, maka berlaku:

$$\frac{y}{\sin\angle PAB} = \frac{AB}{\sin\angle APB}$$

$$\frac{y}{\sin 30^0} = \frac{AB}{\sin 60^0}$$

$$y = \frac{AB\sin 30^0}{\sin 60^0}$$

$$y = \frac{AB\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{AB}{\sqrt{3}} \ldots\ldots persamaan (i)$$

>>Lihat ΔACF

ΔACF adalah segitiga sama sisi sehingga besartiap-tiap sudutnya adalah 60^0. AS adalah garis bagi $\angle FAC$ maka $\angle FAS = \angle SAC = \frac{1}{2}\angle FAC = 30^0$

>>Lihat ΔACS

ΔACS adalah segitiga sama kaki sehingga $\angle SAC = \angle SCA = 30^0$ dan $\angle ASC = 60^0$.

Dengan menggunakan aturan Sinus, maka berlaku:

$$\frac{x}{\sin \angle SAC} = \frac{AC}{\sin \angle ASC}$$

$$\frac{x}{\sin 30^0} = \frac{AC}{\sin 60^0}$$

$$x = \frac{AC.\sin 30^0}{\sin 60^0}$$

$$x = \frac{ABC\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{AC}{\sqrt{3}} \ldots\ldots persamaan\,(ii)$$

>>Lihat ΔPAS

Kerena $\angle PAB = \angle SAC = 30^0$ maka dengan menggunakan aturan Cosinus, didapat:

$$PS^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos \angle PAS$$

$$PS^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(\angle PAB + \angle A + \angle SAC)$$

$$PS^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\{(\angle PAB + \angle SAC) + \angle A\}$$

$$PS^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(60^0 + \angle A)$$

$$PS^2 = x^2 + y^2 - 2xy(\cos 60^0 \cos \angle A - \sin 60^0 \sin \angle A)$$

$$PS^2 = x^2 + y^2 - 2xy\left(\frac{1}{2}\cos \angle A - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin \angle A\right)$$

$$PS^2 = x^2 + y^2 - xy(\cos \angle A - \sqrt{3}\sin \angle A) \ldots\ldots\ldots persamaan\,(iii)$$

Dari *persamaan* (*i*), *persamaan* (*ii*) dan *persamaan* (*iii*) didapatkan:

$$PS^2 = x^2 + y^2 - xy(\cos \angle A - \sqrt{3}\sin \angle A)$$

$$PS^2 = \left(\frac{AC}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{AB}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{AC}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{AB}{\sqrt{3}}\right)(\cos \angle A - \sqrt{3}\sin \angle A)$$

$$PS^2 = \frac{AC^2}{3} + \frac{AB^2}{3} - \frac{AC.AB}{3}(\cos \angle A - \sqrt{3}\sin \angle A)$$

$$PS^2 = \frac{1}{3}\left\{AC^2 + AB^2 - AC.AB(\cos \angle A - \sqrt{3}\sin \angle A)\right\}$$

$$3PS^2 = AC^2 + AB^2 - AC.AB\cos \angle A - \sqrt{3}AC.AB\sin \angle A \ldots\ldots\ldots (iv)$$

>> Lihat ΔABC

Dengan menggunakan aturan Cosinus, maka:

$$AB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC.AB\cos\angle A$$

$$\cos\angle A = \frac{AC^2 + AB^2 - AB^2}{2AC.AB}\ldots\ldots(v)$$

Selanjutnya, gunakan aturan Sinus dengan pendekatan luas daerah ΔABC

$$Luas\,daerah\,\Delta ABC = \frac{1}{2}AC.AB\sin\angle A$$

$$2L\Delta ABC = AC.AB\sin\angle A$$

$$\sin\angle A = \frac{2L\Delta ABC}{AC.AB}\ldots\ldots.(vi)$$

Dari *persamaan* (*iv*), *persamaan* (*v*) dan *persamaan* (*vi*) didapatkan:

$$3PS^2 = AC^2 + AB^2 - AC.AB\cos\angle A - \sqrt{3}AC.AB\sin\angle A$$

$$3PS^2 = AC^2 + AB^2 - AC.AB\left(\frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{AC.AB}\right) - \sqrt{3}AC.AB\left(\frac{2L\Delta ABC}{AC.AB}\right)$$

$$3PS^2 = AC^2 + AB^2 - \frac{1}{2}\left(AC^2 + AB^2 - BC^2\right) - 2\sqrt{3}.L\Delta ABC$$

$$3PS^2 = AC^2 + AB^2 - \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}BC^2 - 2\sqrt{3}.L\Delta ABC$$

$$3PS^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}BC^2 - 2\sqrt{3}.L\Delta ABC$$

$$3PS^2 = \frac{1}{2}\left(AC^2 + AB^2 + BC^2\right) - 2\sqrt{3}.L\Delta ABC$$

$$PS^2 = \frac{1}{6}\left(AC^2 + AB^2 + BC^2\right) - \frac{2}{3}\sqrt{3}.L\Delta ABC$$

Analogi dengan cara pengerjaan yang sama maka akan didapat:

$$PR^2 = RS^2 = PS^2 = \frac{1}{6}\left(AC^2 + AB^2 + BC^2\right) - \frac{2}{3}\sqrt{3}.L\Delta ABC$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa *PR* =*RS* = *PS* yang artinya ΔABC adalah segitiga sama sisi.

D. Kesimpulan

Penggunaan media dalam setiap pembelajaran memang harus selalu dilakukan. Pada pembelajaran geometri penggunaan media berupa *sofware Cabri II Plus*dapat digunakan sebagai upaya meningkatkan kemampuan menyusun bukti geometri. *Sofware Cabri II Plus*digunakan siswa untuk menjastifikasi teorema-teorema yang akan dibuktikan dan menentukan konjektur sebgai dasar menyusun bukti formal geometri. Akan tetapi, tidak ada media pembelajaran yang paling tepat atau baik diterapkan pada materi matematika. Demikian halnya pembelajaran dengan aplikasi *sofware Cabri II Plus* memiliki ketidak sempurnaan. Sehingga, penggunaan media aplikasi *sofware Cabri Geometry II Plus* perlu dikembangkan dengan media ataupun model pembelajaran yang lain supayatercipta proses pembelajaran kita harus selalu mencoba hal baru untuk pembelajaran yang lebih efektif.

DAFTAR PUSTAKA

Bell, F. H. (1987). *Teaching and Learning Mathematics (in Second School)*, USA: Wm. C. Brown.

Budhi, S.W. (2006). *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika*. Jakarta: Ricardo Publishing and Printing.

Cabrilog.Http://en.diplodocs.com Texas Instruments Cabri Geometry II Setting Started.

Knuth, E.J. (2002). *Theachers' Conception of Proof in the Context of Secondary School Mathematics*. Journal of Mathematics Teacher Education 5: 61–88, 2002. © 2002 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands

Maarif, S. (2015). *Pembelajaran Geometri Berbantu Cabri II Plus (Panduan Praktis Mengembangkan Kemampuan Matematis).* Jakarta: In Media.

_____, S. (2014). *Membelajarkan Geometri dengan Cabri Geometry II Plus*. Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika 2014 Matematika Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof.DR.HAMKA, ISBN: 978-602-8040-99-0, 15 Februari 2014.

Mariotti, M.A. (2001). *Introduction To Proof: The Mediation Of A Dynamic Softwareenvironment*. Educational Studies in Mathematics 44: 25–53, 2000. © 2001 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

_______, 2006, *Proof and Proving in Mathematics Education', in A. Gutiérrez and P. Boero (eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education*, Sense Publishers, Rotterdam, The Netherlands.

Mariotti, M. A., and N. Balacheff. 2008. Introduction to the special issue on didacticaland epistemological perspective on mathematical proof, *ZDM: TheInternational Journal on Mathematics Education* 40(3), 341-344.

Nurhasanah, F. 2010. *Abstraksi Siswa SMP dalam Belajar Geometri melalui Penerapan Model Van Hiele dan Geometer's Sketchpad (Junior High School Students' Abstraction in Learning Geometry Through Van Hiele's Model and Geometer's Sketchpad)*. Tesis SPS UPI Bandung: Tidak Diterbitkan

Risnawati, 2012. *Pengaruh Pembelajaran Dengan Pendekatan Induktif-Deduktif Berbantuan Program Cabri GeometriTerhadap Peningkatan Kemampuan Representasi Matematis Siswa Sekolah Menengah Pertama(Studi Eksperimen di SMP Negeri 8 Banda Aceh)*. Tesis SPs UPI Bandung: Tidak Diterbitkan.

Sanchez, E., & Sacristan, A. I. (2003). *Influential Aspects of Dynamic Geometry Activities in the Construction of Proofs*. International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 111-118.

Jones, K. (2002), *Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In: Linda Haggarty (Ed), Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice.* London: RoutledgeFalmer. Chapter 8, pp 121-139. ISBN: 0-415-26641-6.