TITIK TETAP (*FIXED POINT*) PADA TRANSFORMASI MÖBIUS

Iden Rainal Ihsan

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Islam Nusantara,
Jln. Soekarno-Hatta No 530 Bandung
irainalihsan@uninus.ac.id

Abstrak

Transformasi Möbius merupakan suatu transformasi yang didefinisikan di bidang kompleks yang diperluas ($\mathbb{C}_\infty$). Bentuk dari transformasi Möbius didefinisikan dan dituliskan sebagai $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$ dan $\Delta = ad - bc \neq 0$. Secara geometris transformasi Möbius memiliki sifat yang istimewa yakni memetakan himpunan garis dan lingkaran kembali menjadi himpunan garis dan lingkaran di $\mathbb{C}_\infty$. Secara aljabar transformasi Möbius juga memiliki sifat yang istimewa, yakni membentuk suatu grup terhadap operasi komposisi. Berdasarkan struktur aljabarnya, grup transformasi Möbius dapat ditentukan klasifikasi geometrisnya. Klasifikasi tersebut dilihat dari kelas konjugasi dan juga dari banyaknya titik tetap dan klasifikasi titik tetap itu sendiri. Dalam kaitannya dengan membangun suatu transformasi Möbius berdasarkan titik tetap. Pada artikel ini akan dibahas mengenai titik tetap pada transformasi Möbius.

Kata Kunci : Transformasi Möbius, titik tetap.

1. PENDAHULUAN

Perkembangan peradaban manusia dari masa ke masa selalu mengalami perubahan, baik itu perubahan dengan cakupan dan implikasi kecil maupun yang besar. Perkembangan peradaban manusia tercatat oleh sejarah beralih dari hal yang relatif sederhana ke hal yang cenderung lebih kompleks. Di pihak atau di sisi lain, perkembangan peradaban dipandang mengalami penyederhanaan beberapa upaya pemenuhan keperluan manusia. Di era moderen, globalisasi, dan kemajuan pesat iptek saat ini dapat terlihat kemudahan-kemudahan yang tidak ada di masa atau zaman dahulu. Kemajuan pesat dapat kita saksikan pada bidang telekomunikasi dan transportasi. Dengan teknologi yang terkini kita dapat berkomunikasi jarak jauh dengan mudah. Dengan ilmu pengetahuan dan

teknologi pula transportasi, baik moda transportasi maupun infrastrukturnya dapat didesain sedemikian rupa sehingga perjalanan menjadi efektif dan efisien. Masih banyak lagi hal atau bidang yang berkembang sebagai implikasi dari perkembangan iptek.

Matematika merupakan bidang ilmu yang cukup memiliki kontribusi dan peran dalam kemajuan iptek atau sains dan teknologi dewasa ini. Sebagaimana kita mengetahui bahwa matematika dapat diaplikasikan di semua bidang, termasuk sains dan teknologi. Matematika dapat berkontribusi dan berperan terhadap kemajuan sains dan teknologi dikarenakan matematika juga mengalami perkembangan. Matematika mengalami perkembangan melalui pengkajian, penelitian, dan pengembangan di beberapa sub bidang. Beberapa ahli matematika ada yang mengkaji bidang aljabar, analisis, geometri, kombinatorika, statistika, matematika terapan dan lain sebagainya. Ada pun ahli yang mengkaji beberapa bidang secara terintegrasi.

Terdapat bidang yang dapat dikaji secara aljabar dan geometri, yakni transformasi Möbius. Secara geometri, transformasi tersebut dapat dilihat sifat-sifat geometrisnya, sedangkan secara aljabar transformasi tersebut dapat dikaji strukturnya yang merupakan grup (Ihsan[1], 2015). Menurut Ihsan[1] (2015) dengan mengkaji kelas konjugasi dari grup transformasi Möbius kita dapat mengetahui klasifikasi geometris dari suatu transformasi Möbius. Suatu transformasi Möbius dapat berupa transformasi *parabolic*, *elliptic*, *hyperbolic*, dan *loxodromic*. Klasifikasi tersebut juga mengacu pada banyaknya beserta klasifikasi titik tetap (*fixed point*) dari suatu transformasi Möbius. Berdasarkan hal tersebut pada kajian ini akan dibahas mengenai *fixed point* pada transformasi Möbius.

2. RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, terdapat rumusan masalah pada artikel ini. Rumusan masalah pada artikel ini adalah sebagai berikut:

- 1) Bagaimana pembuktian terorema-teorema terkait titik tetap pada transformasi Möbius
- 2) Bagaimana implikasi teorema-teorema terkait titik tetap transformasi Möbius

3. MANFAAT PENULISAN

Kajian ini dapat dipandang memiliki manfaat untuk pengembangan teori matematika khususnya di bidang geometri aljabar (*algebraic geometri*). Berdasarkan kajian dari Ihsan dan Muhammad (2015) pembahasan transformasi Möbius dapat dijadikan sarana penyampaian konsep grup. Ihsan[2] (2015) menambahkan klasifikasi geometris dari transformasi Möbius dapat pula dijadikan sarana penyampaian konsep grup secara lebih lanjut. Berdasarkan hal tersebut kajian ini dapat mendukung pembahasan-pembahasan sebelumnya sedemikian hingga teori atau bahasan menjadi lebih lengkap.

4. PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dipaparkan pembahasan mengenai inti dari kajian ini yakni mengenai *fixed point* dan *cross ratio* pada transformasi Möbius. Pada bagian ini terlebih dahulu akan disampaikan transformasi Möbius. Pembahasan difokuskan kepada grup transformasi Möbius.

Grup Transformasi Möbius

Transformasi Möbius adalah suatu transformasi di bidang kompleks yang diperluas ($\mathbb{C}_\infty$) yang didefinisikan sebagai berikut

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty, \Delta = ad - bc \neq 0 \dots\dots\dots(1)$$

Transformasi Möbius secara geometris memiliki keistimewaan yakni memetakan himpunan lingkaran dan garis kembali menjadi lingkaran dan garis. Secara aljabar dapat dikaji struktur aljabarnya. Himpunan semua transformasi Möbius (disimbolkan $\mathcal{M}$) merupakan suatu grup terhadap operasi komposisi fungsi. Grup transformasi Möbius ($\mathcal{M} \circ$) dapat dikaji kelas-kelas konjugasinya berdasarkan banyak dan klasifikasi titik tetap. Ihsan[1] (2015) memaparkan bahwa apabila suatu transformasi Möbius memiliki satu titik tetap, maka transformasi Möbius tersebut diklasifikasikan sebagai transformasi *parabolic*. Selanjutnya apabila suatu transformasi Möbius memiliki dua titik tetap, maka transformasi Möbius tersebut dapat diklasifikasikan kedalam transformasi *elliptic* atau *hyperbolic* atau *loxodormic* tergantung seberapa besar *trace* matriks yang berkorespondensi dengan transformasi Möbius yang dimaksud. Suatu transformasi Möbius dapat dikaitkan dengan suatu matriks elemen dari $PSL_2(\mathbb{C})$, karena grup $PSL_2(\mathbb{C})$ isomorfis dengan grup $\mathcal{M} \circ$ (Ihsan[1], 2015)

Titik Tetap pada Transformasi Möbius

Suatu transformasi Möbius f memetakan bilangan kompleks ke bilangan kompleks. Setiap transformasi Möbius dapat memetakan suatu bilangan kompleks ke bilangan kompleks yang sama. Misalkan terdapat $z_0 \in \mathbb{C}$ sedemikian sehingga $f(z_0) = z_0$, maka z_0 disebut sebagai titik tetap (*fixed point*) dari transformasi Möbius f .

Misalkan $f(z_0) = \frac{az_0+b}{cz_0+d} = z_0$ sedemikian sehingga didapat persamaan $cz_0^2 + (d - a)z_0 - b = 0$. Persamaan yang didapat adalah merupakan persamaan kuadrat sedemikian sehingga persamaan tersebut paling banyak memiliki dua jawaban atau solusi. Dengan demikian suatu transformasi Möbius apabila bukan merupakan pemetaan identitas, maka paling banyak memiliki dua titik tetap

Terdapat teorema mengenai titik tetap pada transformasi Möbius yakni sebagai berikut

Teorema 1. Suatu transformasi Möbius dapat ditentukan secara tunggal (unik) oleh pemetaan yang dilakukan terhadap tiga titik berlainan di $\mathbb{C}$.

Bukti. Misalkan $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$, kemudian terdapat transformasi Möbius f dengan $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$, dan $f(c) = \gamma$. Kemudian dimisalkan pula terdapat transformasi Möbius g dengan $g(a) = \alpha, g(b) = \beta$ dan $g(c) = \gamma$. Karena merupakan grup, maka setiap transformasi Möbius memiliki invers yang juga merupakan transformasi Möbius, sedemikian hingga terdapat transformasi g^{-1} . Kemudian hasil operasi dari $g^{-1} \circ f$ juga merupakan suatu transformasi Möbius. Dengan demikian didapat $g^{-1} \circ f(a) = a, g^{-1} \circ f(b) = b$ dan $g^{-1} \circ f(c) = c$. Berdasarkan hal tersebut transformasi Möbius $g^{-1} \circ f$ memiliki tiga titik tetap. Sehingga transformasi Möbius $g^{-1} \circ f$ merupakan transformasi identitas, jadi haruslah $f = g$. Dengan demikian suatu transformasi Möbius dapat ditentukan secara tunggal berdasarkan pemetaan tiga titik yang berbeda ■

Implikasi Titik Tetap pada Transformasi Möbius

Berdasarkan pembuktian yang telah dipaparkan, suatu transformasi Möbius dapat diketahui apabila kita mengetahui hasil pemetaan tiga titik berbeda di $\mathbb{C}$. Kita dapat membangun suatu transformasi yang bukan merupakan transformasi identitas cukup dengan mendapatkan informasi mengenai hasil pemetaan tiga titik berbeda di $\mathbb{C}$. Menurut Ihsan[1] (2015) titik tetap sangat penting dalam menentukan klasifikasi geometris dari transformasi Möbius dengan mengguankan konsep *cross ratio*.

5. SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil kajian dapat disimpulkan titik tetap berkontribusi dalam pembahasan transformasi Möbius. Dengan diketahuinya hasil pemetaan tiga titik yang berbeda di $\mathbb{C}$. Kita dapat mengonstruksi pemetaan atau transformasi Möbius secara unik apabila kita mengetahui hasil pemetaan tiga titik yang berbeda.

Untuk dapat dihasilkan kajian yang dapat berkontribusi lebih banyak, disarankan untuk melengkapi kajian mengenai transformasi Möbius lebih khususnya mengenai sifat-sifat khususnya. Dapat dikaji secara lebih lanjut mengenai kelas konjugasi dari transformasi Möbius, *cross ratio* pada transformasi Möbius dan masih banyak lagi.

Kemudian dipandang perlu juga untuk mengkaji dan meneliti kontribusi dari transformasi Möbius terhadap perkembangan sains dan teknologi. Dapat dikaji misalnya aplikasi transformasi Möbius di bidang teknologi dan bidang terapan yang lainnya. Bisa juga dikaji relevansi penyampaian konsep dan kajian transformasi Möbius sebagai sarana menyampaikan atau mengajarkan konsep dan esensi dari materi matematika di jenjang formal.

DAFTAR PUSTAKA

- Budhi, W.S. (2003). *Langkah Awala Menuju ke Olimpiade Matematika*, Jakarta : Ricardo.
- Ihsan, I.R. (2015). *Klasifikasi Geometris dari Transformasi Möbius*. Tesis ITB Bandung : Tidak diterbitkan
- Ihsan, I.R. (2015). *Pembelajaran Klasifikasi Geometris dari Transformasi Möbius, Suatu Sarana Penyampaian Konsep Grup*. Makalah disampaikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY 2015 pada tanggal 14 November 2015.
- Ihsan, I.R. dan Muhammad, G.M. (2015). *Pembelajaran Sistem Transformasi Möbius ($\mathcal{M} \circ$) Sebagai Sarana Menyampaikan Konsep Grup*. Makalah disampaikan pada Seminar Nasional Pendidikan Matematika NMC V Uninus pada tanggal 30 September 2015.
- Needham, T. (1997). *Visual Complex Analysis*, Oxford : Oxford University Press.
- Olsen, J. (2010). *The Geometry of Möbius Transformations*, Rochester : University of Rochester.
- Schwerdtfeger, H. (1980). *Complex Numbers : Circle Geometry, Moebius Transformations, Non-Euclidean Geometry*. New York : Dover Publication Inc.