

Analisis Proses Berpikir Menyusun Bukti Matematis Mahasiswa Calon Guru Pada Mata Kuliah Struktur Aljabar

Lilis Marina Angraini¹, M Dadan Sundawan², Muchamad Subali Noto³

¹*Pendidikan Matematika, Universitas Islam Riau, Pekanbaru, Indonesia; lilis-marina@edu.uir.ac.id*

^{2,3}*Pendidikan Matematika, Universitas Swadaya Gunung Jati, Cirebon, Indonesia; ¹mdsmath@gmail.com; ²msnoto.ugj@gmail.com*

Abstrak

Penelitian ini secara khusus bertujuan untuk menelaah kemampuan mahasiswa calon guru Pendidikan Matematika dalam menyusun bukti matematis, serta mengamati kendala apa saja yang dialami mahasiswa dalam menyusun bukti matematis. Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif kualitatif. Penelitian ini dilaksanakan di Universitas Islam Riau jurusan Pendidikan Matematika, pada mahasiswa semester VI sebanyak 21 orang mahasiswa yang mengikuti mata kuliah Struktur Aljabar tahun ajaran 2018/2019. Berdasarkan hasil penelitian ini, dapat disimpulkan bahwa kemampuan pembuktian matematis mahasiswa Universitas Islam Riau dalam menjawab soal Struktur Aljabar memperoleh rata-rata skor sebesar 26 dari skor maksimum 50. Ini artinya kemampuan pembuktian matematis mahasiswa masih kategori cukup namun perlu ditingkatkan lagi agar skor yang diperoleh lebih tinggi. Persentase rata-rata skor kemampuan pembuktian matematis adalah 52%.

Kata Kunci: Menyusun Bukti Matematis, Mahasiswa Calon Guru, Struktur Aljabar.

1. Pendahuluan

Salah satu keterampilan matematis yang perlu dimiliki mahasiswa calon guru adalah keterampilan pembuktian matematis. Matematika merupakan ilmu yang memuat definisi dan pernyataan-pernyataan turunan yang harus dibuktikan, yang mengharuskan mahasiswa calon guru khususnya mahasiswa Pendidikan Matematika yang harus memiliki kemampuan tersebut. Mahasiswa dikatakan memiliki kemampuan pembuktian matematis, jika mahasiswa tersebut mampu memvalidasi dan mengkonstruksi bukti yang berhubungan dengan jenis-jenis pembuktian

yang sering muncul (Fadillah dan Jamilah, 2016). Adapun kegiatan memvalidasi bukti tersebut meliputi: (1) membaca suatu pembuktian dalam matematika untuk menentukan suatu kebenaran atau kekeliruan dengan melihat kesesuaian antara sistem aksioma, premis, dan hasil matematika yang sudah ada dengan alur penalaran deduktifnya; (2) melengkapi pembuktian; (3) membandingkan keefektifan bukti yang satu dengan bukti yang lainnya.

Sadikin (2009) mengungkapkan bahwa bentuk pembuktian langsung di antaranya: metode pengecekan satu persatu, pembuktian dengan eliminasi kasus, dan pembuktian dengan ekuivalensi, sedangkan pembuktian tidak langsung merupakan pembuktian dengan cara kontradiksi. Untuk mengaplikasikan metode-metode pembuktian tersebut tentu diperlukan kemampuan pembuktian yang baik. Oleh sebab itu, seseorang yang paham dengan metode pembuktian belum tentu mahir dalam menerapkannya dalam suatu kasus. Tetapi pemahaman terhadap metode pembuktian merupakan langkah awal dalam melakukan pembuktian matematis.

Menurut Lestari & Yudhanegara (2015) kemampuan pembuktian matematis adalah kemampuan memahami pernyataan atau simbol matematika serta memberikan alasan/bukti terhadap kebenaran solusi. Ada tiga alasan mengapa pembuktian matematis perlu untuk dikembangkan, yaitu: (1) kemampuan pembuktian sangat penting untuk pembelajaran matematika yang mendalam, (2) kemahiran dalam pembuktian dapat meningkatkan kemampuan matematis mereka lebih luas, dan (3) ditemukannya kesulitan yang dihadapi oleh banyak siswa dan mahasiswa dalam pembuktian matematika.

Berbagai hasil penelitian terdahulu juga menunjukkan bahwa masih banyak mahasiswa yang mengalami kesulitan dalam membuktikan (Guler, 2016). Selanjutnya hasil penelitian Ozdemir & Ovez (2012) yang menyimpulkan bahwa kemampuan pembuktian matematis mahasiswa masih rendah. Hasil penelitian Hodiyanto (2017) diperoleh bahwa mahasiswa masih banyak melakukan kesalahan dalam melakukan pembuktian matematis.

Melalui tugas pembuktian, dosen dapat melihat: (1) bagaimana kemampuan mahasiswa dalam berargumentasi secara logis, (2) bagaimana mahasiswa

menggunakan contoh dan lawan contoh untuk mendukung argumentasinya, (3) kelemahan-kelemahan apa saja yang dialami mahasiswa dalam bernalar, dan (4) miskonsepsi apa yang sering dialami mahasiswa. Berdasarkan uraian mengenai sejumlah para ahli mengenai pembuktian matematis di atas, dapat dirangkum bahwa kemampuan pembuktian matematis merupakan kemampuan yang dimiliki individu dalam berargumentasi secara logis dan dapat menggunakan nalar dalam mempertahankan argumennya sehingga didapatkan hasil yang valid.

Indikator kemampuan pembuktian matematis menurut Lestari (2015) antara lain: (1) Membaca pembuktian matematis. (2) Melakukan pembuktian matematis secara langsung, tak langsung atau dengan induksi matematis (3) Mengkritisi pembuktian matematis dengan menambah, mengurangi atau menyusun kembali suatu pembuktian matematis.

Mata kuliah Struktur Aljabar merupakan mata kuliah yang mengharuskan kecakapan mahasiswa dalam pembuktian matematis. Struktur Aljabar merupakan salah satu mata kuliah wajib yang harus ditempuh oleh mahasiswa Pendidikan Matematika selaku calon guru. Struktur Aljabar merupakan mata kuliah yang memuat konsep dari suatu materi yang menjadi konsep dasar yang diajarkan mulai dari Tingkat Sekolah Dasar hingga Tingkat Sekolah Menengah. Materi dari Struktur Aljabar seringkali menjadi materi yang dinilai sulit oleh mahasiswa, padahal Struktur Aljabar syarat dengan definisi, teorema dan lemma yang mengharuskan mahasiswa untuk memiliki keterampilan dalam hal pembuktian. Sehingga dengan memiliki kemampuan pembuktian, pemahaman mahasiswa terhadap materi Struktur Aljabar semakin meningkat juga. Hal ini sejalan dengan pendapat yang dikemukakan oleh Hana (Arnawa, 2009) bahwa pemahaman matematis dapat ditunjukkan dengan kemampuan pembuktian matematis.

Selama mengajarkan mata kuliah Struktur Aljabar dalam jangka waktu 2 semester, fakta dilapangan menunjukkan rendahnya kemampuan pembuktian matematis mahasiswa. Hal ini ditunjukkan dari hasil tes mahasiswa yang telah mengikuti perkuliahan Struktur Aljabar, tes tersebut dirancang untuk mengukur kemampuan pembuktian matematis mahasiswa. Mahasiswa yang mengikuti tes mata kuliah Struktur Aljabar sebanyak 120 mahasiswa, namun 100 orang diantara mereka mendapat skor di bawah 35

dengan skor maksimal 100. Berdasarkan hasil pengamatan peneliti selama proses pembelajaran berlangsung mahasiswa kurang aktif, pemahaman mahasiswa akan konsep yang diajarkan masih lemah, komunikasi yang terjadi satu arah, serta kemampuan berpikir atau penalaran mahasiswa masih rendah.

Sumarmo (2010) menyatakan bahwa seorang pembaca dikatakan memahami teks matematika misalnya sajian bukti matematika, apabila dia dapat mengemukakan gagasan matematika yang termuat dalam teks tersebut secara lisan ataupun tulisan dengan bahasanya sendiri. Indikator kemampuan menyusun bukti matematis menurut Sumarmo adalah: (1) kemampuan mengorganisasikan dan memanipulasi fakta untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan; (2) kemampuan membuat koneksi antara fakta dengan unsur dari konklusi yang hendak dibuktikan.

Indikator kemampuan menyusun bukti matematis yang digunakan dalam penelitian ini adalah: (1) Melakukan identifikasi terhadap masalah pembuktian ditandai dengan ketepatan menentukan langkah pembuktian; (2) Menyusun argumen untuk membuktikan/ menjelaskan pernyataan; (3) Menggunakan konsep dan prinsip yang berkaitan dengan penyusunan pembuktian ditandai dengan ketepatan dalam pemilihan dan pemanfaatannya dalam rangkaian pembuktian; (4) Menentukan validitas pembuktian matematis, ditandai dengan ketepatan dalam menyimpulkan apakah langkah-langkah pembuktian mengandung kesalahan atau tidak; (5) Memahami kesesuaian antara pernyataan dan bukti ditandai dengan ketepatan dan kecermatan dalam menyimpulkan apakah langkah-langkah pembuktian sesuai dengan pernyataan yang dibuktikan.

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: (1) Bagaimana kemampuan mahasiswa calon guru Pendidikan Matematika dalam menyusun bukti matematis?; (2) Kendala apa saja yang dialami mahasiswa dalam menyusun bukti matematis?

2. Metode

Penelitian ini dilaksanakan di Universitas Islam Riau jurusan Pendidikan Matematika semester VI yang mengikuti mata kuliah Struktur Aljabar tahun

ajaran 2018/2019. Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif kualitatif. Penelitian ini dilaksanakan di Universitas Islam Riau jurusan Pendidikan Matematika, pada mahasiswa semester VI sebanyak 21 orang mahasiswa yang mengikuti mata kuliah Struktur Aljabar tahun ajaran 2018/2019. Data dalam penelitian ini akan dikumpulkan melalui tes dan wawancara sebagai penunjang. Instrumen yang digunakan pada penelitian ini adalah instrumen tes tentang kemampuan pembuktian matematis.

3. Hasil dan Pembahasan

Kemampuan pembuktian matematis (KPM) adalah kemampuan memahami pernyataan atau simbol matematika, kemampuan memanipulasi fakta untuk menunjukkan suatu kebenaran, serta kemampuan untuk membuat koneksi antara fakta dengan unsur dari konklusi yang hendak dibuktikan, sehingga dapat melakukan pembuktian secara langsung, tidak langsung ataupun induksi matematis. Berdasarkan data kemampuan pembuktian matematis yang diperoleh mahasiswa Universitas Islam Riau diperoleh hasil sebagai berikut. Tabel 1 menunjukkan hasil kemampuan pembuktian matematis (KPM)

Tabel 1. Ketercapaian Indikator KPM

No. Soal	Indikator yang diukur	Rata-rata skor yang diperoleh	Skor Maksimal	Ketercapaian (%)
K1. Melakukan identifikasi terhadap masalah pembuktian ditandai dengan ketepatan menentukan langkah pembuktian				
1.	Menyelidiki sifat ketertutupan suatu himpunan terhadap operasi yang berlaku pada himpunan tersebut.	6,14	10	61,4
K2. Menyusun argumen untuk membuktikan/menjelaskan pernyataan				
2.	Menguji aksioma grup pada system matematika.	0,71	10	7,1

K3. Menggunakan konsep dan prinsip yang berkaitan dengan penyusunan pembuktian ditandai dengan ketepatan dalam pemilihan dan pemanfaatannya dalam rangkaian pembuktian				
3.	Menyelidiki sifat komutatif grup abelian.	5,52	10	55,2
K4. Menentukan validitas pembuktian matematis, ditandai dengan ketepatan dalam menyimpulkan apakah langkah-langkah pembuktian mengandung kesalahan atau tidak				
4.	Menyelidiki keberlakuan aksioma grup.	10	10	100
K5. Memahami kesesuaian antara pernyataan dan bukti ditandai dengan ketepatan dan kecermatan dalam menyimpulkan apakah langkah-langkah pembuktian sesuai dengan pernyataan yang dibuktikan				
5.	Menyelidiki apakah suatu himpunan bagian dari grup.	3,62	10	36,2

Tabel di atas menunjukkan bahwa, indikator K1-K5 diukur dengan soal 1-5 diperoleh ketercapaian 61,4%, 7,1%, 55,2%, 100%, 36,2%. Ini menunjukkan bahwa secara keseluruhan indikator rata-rata tersebut belum mencapai 75%.

Indikator pertama diukur dengan no soal 1. Diberikan pembuktian untuk menyelidiki sifat ketertutupan suatu himpunan valid atau tidak. Berdasarkan pembuktian tersebut terdapat 50% dari jumlah seluruh mahasiswa dapat menyelidiki sifat ketertutupan suatu himpunan terhadap operasi dengan benar yang menunjukkan bahwa pembuktian tersebut tidak valid. Sisanya 50% lagi keliru dalam menyelidiki sifat ketertutupan suatu himpunan terhadap operasi, sehingga yang diselidiki salah.

Indikator kedua diukur dengan no soal 2. Disajikan permasalahan terkait aksioma grup, 100% mahasiswa tidak dapat membuktikan permasalahan tersebut dengan permisalan yang berbeda. Ini menunjukkan bahwa mahasiswa tidak dapat menyusun argumen untuk membuktikan/menjelaskan pernyataan, yang berarti kemampuan pembuktian matematis indikator ke 2 belum tercapai.

Indikator ketiga diukur dengan no soal 3. Menyelidiki sifat komutatif grup abelian, diberikan pernyataan dan pembuktian grup abelian. Mahasiswa diberi dua soal yang bersesuaian dengan pernyataan pembuktian tersebut, soal pertama melengkapi tabel operasi dan soal kedua menunjukkan alur pembuktian grup abelian dipenuhi dengan elemen yang terdapat pada soal pertama. Berdasarkan kedua soal tersebut terdapat 25% mahasiswa hanya menjawab soal pertama yaitu melengkapi tabel, namun keliru dalam melengkapinya sehingga jawaban masih salah. Sisanya 75% dari jumlah seluruh mahasiswa dapat menunjukkan alur pembuktian grup abelian dipenuhi dengan elemen yang terdapat pada soal pertama, namun masih keliru dalam melengkapi tabel operasi pada soal pertama.

Indikator keempat diukur dengan no soal 4. 100% seluruh mahasiswa dapat menyelidiki keberlakuan aksioma grup dengan benar. Ini menunjukkan bahwa semua mahasiswa dapat menentukan validitas pembuktian matematis, yang artinya indikator kemampuan pembuktian matematis ke 4 tercapai.

Indikator kelima diukur dengan no soal 5. Menyelidiki apakah suatu himpunan bagian dari grup, diberikan pembuktian dari suatu pernyataan tentang grup siklik. 75% dari jumlah seluruh mahasiswa dapat memberi pernyataan dari pembuktian tersebut. Namun 100% mahasiswa tidak dapat memberikan contoh dan membuktikan contoh yang memenuhi pernyataan tersebut.

Kesalahan mahasiswa dalam menjawab soal no 1 yaitu rata-rata keliru pada pembuktian yang sudah ada, sehingga berpikir penyelesaiannya sudah valid karena kedua ruasnya dapat dibuktikan. Mahasiswa yang keliru dalam menyelesaikan no 1 terlihat bahwa mereka belum menganalisis soal dengan benar, sehingga salah dalam menyelidiki pembuktian sifat ketertutupan terhadap operasi. Ini artinya kemampuan mengidentifikasi masalahnya masih kurang. Sementara pada soal no 2 seluruh mahasiswa asal-asal dalam menjawab, belum ada mahasiswa yang menjawab mengarah pada perintah soal. Ini artinya mahasiswa tidak mengerti tentang menerapkan konsep grup terhadap operasi perkalian, sehingga kemampuan pembuktian mahasiswa masih sangat kurang pada soal no 2.

Pada no 3, kebanyakan mahasiswa melakukan kesalahan pada pertanyaan pertama yaitu melengkapi tabel operasi grup abelian. Kendalanya dalam operasi perkalian, ini artinya kemampuan mahasiswa dalam memanfaatkan atau menerapkan pembuktian yang ada, masih kurang, namun pada soal keduanya mahasiswa dapat membuktikan alur pembuktian dengan elemen yang terdapat pada soal pertama. Sedangkan no 5, rata-rata mahasiswa dapat mengetahui pernyataan terhadap pembuktian grup siklik yang artinya mahasiswa memahami alur pembuktian yang ada, kesalahan mahasiswa dalam menjawab soal no 5 yaitu mahasiswa tidak dapat menuliskan contoh yang memenuhi pernyataan tersebut. Artinya kemampuan memilih atau membuat contoh yang sesuai dengan pembuktian masih kurang, karena mahasiswa kebingungan dalam membuat contoh sendiri.

Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa mahasiswa belum terbiasa dengan soal-soal pembuktian, pengalaman mahasiswa dalam mengerjakan soal-soal non rutin yang masih kurang, dan mahasiswa terbiasa mengerjakan soal-soal yang sesuai contoh. Hal ini juga terlihat dari kendala-kendala mahasiswa dalam mengerjakan soal. Kemampuan mengidentifikasi masalah, kemampuan menerapkan konsep, kemampuan memanfaatkan pernyataan, dan kemampuan dalam membuat contoh sendiri yang masih kurang.

4. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dalam penelitian ini adalah: kemampuan pembuktian matematis mahasiswa Pendidikan Matematika masih dalam kategori cukup namun perlu ditingkatkan lagi agar skor yang diperoleh lebih tinggi. Persentase rata-rata skor kemampuan pembuktian matematis mahasiswa Pendidikan Matematika secara keseluruhan adalah 52%. Adapun kendala-kendala yang dialami mahasiswa Pendidikan Matematika dalam hal kemampuan pembuktian matematis adalah: (1) kemampuan mengidentifikasi masalahnya masih kurang; (2) kemampuan pemahaman konsep masih lemah; (3) kemampuan dalam memanipulasi aljabar mahasiswa masih lemah dan (4) mahasiswa belum terbiasa membuat contoh sendiri yang berkaitan dengan soal-soal pembuktian matematis.

Daftar Pustaka

- Arnawa, M. I. (2009). Mengembangkan kemampuan mahasiswa dalam memvalidasi bukti pada aljabar abstrak melalui pembelajaran berdasarkan teori APOS. *Jurnal matematika dan sains*. XIV(2): 62-68
- Fadillah, S. & Jamilah. (2016). Pengembangan bahan ajar struktur aljabar untuk meningkatkan kemampuan pembuktian matematis mahasiswa. *Jurnal ilmiah pendidikan cakrawala pendidikan*. XXXV(1): 106-113.
- Guler, G. (2016). The difficulties experienced in teaching proof to prospective mathematics teachers: Academician views. *Higher Education Studies*. 6 (1): 145.
- Hodiyanto, H. (2017). Analisis kesalahan mahasiswa semester v dalam mengerjakan soal pengantar analisis real. *Edu Sains: Jurnal Pendidikan Sains & Matematika*. 5 (1):Ozdemir & Ovez, 2012: 33-44.
- Lestari, K. E. dan Yudhanegara, M. R. (2015). *Penelitian pendidikan matematika*. Bandung: PT Refika Aditama.
- Lestari, K. E. (2015). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Menggunakan Pendekatan Induktif-Deduktif Pada Mata Kuliah Analisis Real. *Jurnal Mendidik*. 2 (1).
- Ozdemir, E. & Ovez, F. T. D. (2012). A research on proof perceptions and attitudes towards proof and proving: some implications for elementary mathematics prospective teachers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*. 46: 2121–2125.
- Sadikin, A. (2009). *Pengantar logika matematika dan himpunan*. Pontianak: STAIN Pontianak Press.
- Sumarmo. (2010). *Advanced mathematical thinking and habit of minds mahasiswa*. Bahan ajar mata kuliah kajian dan isu pendidikan matematika pascasarjana UPI dan STKIP Siliwangi Bandung. Hal 12-14.