PEMETAAN DALAM RUANG METRIK-G

Anton Wahono[1], Arta Ekayanti[2]

[1]*Universitas Muhammadiyah Ponorogo, Jalan Budi Utomo No.10 ,Ponorogo; antonwahono06@gmail.com*

[2] *Universitas Muhammadiyah Ponorogo, Jalan Budi Utomo No.10 ,Ponorogo; arta_ekayanti@ymail.com*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk: (1) Mengetahui hubungan pemetaan kontinu-G, pemetaan kontinu Cauchy-G, dan pemetaan kontinu seragam-G dalam ruang metrik-G. (2) Mengetahui hubungan himpunam diskrit-G, himpunan diskrit Cauchy-G, dan himpunan diskrit seragam-G pada ruang metrik-G. (3) Mengetahui hubungan antara pemetaan kontinu Cauchy-G dan himpunan diskrit Cauchy-G pada ruang metrik-G. Penelitian ini merupakan penelitian kajian pustaka. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah mengkaji berbagai literatur ilmiah seperti buku, artikel dan jurnal terkait pemetaan dalam ruang metrik-G. Referensi utama dalam penelitian ini adalah artikel berjudul *"Uniform Kontinuity and Cauchy Continuity in G-Metric Spaces"*. Hasil penelitian ini adalah: (1) Pemetaan yang kontinu seragam-G merupakan pemetaan kontinu Cauchy-G dan pemetaan yang kontinu Cauchy-G merupakan pemetaan kontinu-G. (2) Setiap himpunan diskrit seragam-G merupakan diskrit Cauchy-G dan setiap himpunan diskrit Cauchy-G merupakan diskrit-G. (3) Hubungan pemetaan kontinu Cauchy-G dan himpunan diskrit-G pada ruang metrik-G dapat dilihat dari ekuivalensi berikut: Ruang metrik-G (X, G) merupakan ruang metrik lengkap-G ekuivalen dengan pernyataan jika A dan B merupakan himpunan bagian saling asing dari X maka terdapat pemetaan kontinu Cauchy-G bernilai Real pada X sehinga $f(x) = 0$ dan $f(y) = 1$ untuk setiap $x \in A$ dan $y \in B$ dan ekuivalen dengan pernyataan jika D adalah himpunan bagian tertutup diskrit-G dari X maka D Diskrit Cauchy-G.

Kata Kunci: Pemetan kontinu-G, pemetaan kontinu seragam-G, pemetaan kontinu Cauchy-G, himpunan diskrit-G, diskrit seragam-G, diskrit Cauchy-G.

Abstract

This study aims to: (1) Determine the relationship of G-continuous mapping, G-Cauchy continuous mapping, and G-uniforms continuous mapping in G-metric space. (2) Knowing the relationship of G-discrete set, G-Cauchy discrete set, and G-uniforms discrete sets on G-metric space. (3) Knowing the relationship between G-Cauchy continuous mapping and G-Cauchy discrete sets in G-metric space. This research is a literature study. The method used in this research is examine various scientific literature such as books, articles and journals about mapping in G-metric space. The main reference in this research is an article entitled "Uniform Continuity and Cauchy Continuity in G-Metric Spaces".The results of this research are as follows: (1) G-uniforms continuous mapping is a G-Cauchy continuous mapping and G-Cauchy continuous mapping is G-continuous mapping. (2) Every G-uniforms discrete set is G-Cauchy discrete and any G-Cauchy discrete set is G-discrete. (3) The relationship between the G-Cauchy continuous mapping and the G-discrete set in the G-metric space can be seen from the equivalence of the following statement: The G-metric space (X, G) is a G-complete metric space equivalent with statement if A and B are disjoin G-closed subset of X, then there is a real valued G-Cauchy continuous function on X such that $f(x) = 0$ and $f(y) = 1$ for each $x \in A$ and $y \in B$ respectively and equivalent with statemen if D is a G-closed discrete subset of X, then D is a G-Cauchy discrete.

Key Word: *G-Continuous mapping, G-Uniform Continuous mapping, G-Cauchy continuous mapping, G-discrete, G-uniform diskrete, G-Cauchy diskrete.*

1. Pendahuluan

Matematika adalah ilmu pengetahuan yang mempunyai karakter berbeda dengan cabang ilmu yang lain. Matematika lebih menekankan kegiatan dalam dunia rasio (penalaran) bukan menekankan dari hasil eksperimen atau hasil observasi. (Russeffendi ET, 1980:148) Salah satu cabang ilmu dalam matematika adalah analisis. Menurut Hernadi analisis merupakan "tubuh dari matematika" yang dibangun melalui konsep limit dan fungsi. Analisis lebih menekankan kepada jastifikasi secara deduktif terhadap suatu konsep. Salah satu bahasan dalam analisis adalah metrik yaitu perumuman dari konsep jarak. Definisinya adalah sebagai berikut:

Definisi 1.1 Ruang Metrik (Hernadi, 2015:31).

Sebuah pemetaan $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik pada X jika memenuhi kondisi berikut:

1. $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$.
2. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$, untuk setiap $x, y \in X$.
3. $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$.
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

Selanjutnya pasangan terurut (X, d) disebut ruang metrik. Metrik pada awalnya diperkenalkan oleh Maure Frechet pada tahun 1906 dan mengalami perkembangan secara terus menerus. Diantaranya tahun 2006 Zead Mustafa dan Brailey Sims mengenalkan ruang metrik umum baru yang dikenal dengan ruang metrik-G. Penyelidikan-penyelidikan lebih lanjut tentang ruang metrik-G juga dilakukan oleh Merve Ilkhan dan Emrah Evren Kara. Penelitian tersebut mengkaji pemetaan kontinu seragam dan Cauchy seragam pada ruang metrik-G. Dari penelitian-penelitian tersebut, diketahui bahwa terdapat beberapa macam pemetaan dalam ruang metrik-G. Berdasarkan paparan diatas penulis bermaksud menyelidiki bagaimana hubungan pemetaan kontinu-G, pemetaan kontinu Cauchy-G, dan pemetaan kontinu seragam-G pada ruang metrik-G, bagaimana hubungan himpunan diskrit-G, himpunan diskrit seragam-G, dan himpunan diskrit Cauchy-G pada ruang metrik-G serta bagaimana hubungan antara pemetaan kontinu Cauchy-G dan himpunan diskrit Cauchy-G pada ruang metrik-G

2. Hasil Kajian dan Pembahasan

Pada tahun 2006 konsep ruang metrik diperumum kembali dikenalkan oleh Zead Mustafa dan Brailey Sims dalam artikel "*A New Approach to Generallized Metric Space*". Definisi ruang metrik tersebut adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Metrik-G)

Diberikan himpunan tak kosong X, misal $G: X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ merupakan pemetaan yang memenuhi sifat-sifat:

(G1) $G(x, y, z) = 0$ jika $x = y = z$.

(G2) $0 < G(x, x, y)$untuk setiap $x, y \in X$ dengan $x \neq y$.

(G3) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$untuk setiap $x, y, z \in X$ dengan $z \neq y$.

(G4) $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, x, z) = G(y, z, x) = G(z, x, y) = G(z, y, x)$ (simetris di setiap tiga variabel).

(G5) $G(x,y,z) \le G(x,a,a) + G(a,y,z)$ untuk setiap $x,y,z,a \in X$, (ketaksamaan segi empat).

Selanjutnya pemetaan G disebut *"Generalized Metric"* atau lebih spesifik disebut metrik-G pada X, dan pasangan terurut himpunan dan pemetaan (X,G) disebut ruang metrik-G. Berikut adalah contoh metrik-G

Contoh 2.1 Diberikan himpunan $X = \mathbb{R}$, dan pemetaan $G: X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ dengan $G(x,y,z) = |x-y| + |y-z| + |z-x|$, untuk setiap $x,y,z \in X$ merupakan metrik-G, selanjutrnya pasangan himpunan dan pemetaan (X,G) merupakan ruang metrik-G.

Mustafa dan Sims (2006) menyatakan metrik-G pada metrik $d(x,y)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$G_s(x,y,z) = \frac{1}{3}\{d(x,y) + d(y,z) + d(x,z)\}$$

dan

$$G_m(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\}.$$

Sebaliknya jika (X,G) merupakan ruang metrik-G maka metrik biasa dapat dibentuk dengan cara berikut:

$$d_G(x,y) = G(x,y,y) + G(x,x,y).$$

Karena ruang metrik-G merupakan perumuman konsep ruang metrik, maka ruang metrik-G juga memperumum teori-teori pada ruang metrik biasa diantaranya titik, barisan dalam himpunan, pemetaan dan sifat-sifatnya. Terkait dengan pembahasan titik dalam himpunan di ruang metrik-G berikut dikenalkan konsep persekitaran dalam ruang metrik-G yang disebut sebagai bola–G.

Definisi 2.2 Persekitaran Bola-G

Diberikan (X,G) ruang metrik-G, Bola-G dengan pusat x_0 dan radius $r > 0$, dinotasikan dengan $B_G(x_0,r)$ didefinisikan $B_G(x_0,r) = \{y \in X : G(x_0,y,y) < r\}$.

Berikut ini diberikan sifat-sifat yang berkaitan dengan persekitaran bola-G.

Teorema 2.1. Diberikan ruang metrik-G yaitu (X,G), maka untuk setiap $x_0 \in X$ dan $r > 0$ berlaku:

1. Jika $G(x_0,x,y) < r$ maka $x,y \in B_G(x_0,r)$.
2. Jika $y \in B_G(x_0.r)$, maka terdapat $\delta > 0$, sehingga $B_G(y,\delta) \subseteq B_G(x_0,r)$.

Selanjutnya setelah mengenal persekitaran dalam ruang metrik-G, berikut ini diperkenalkan definisi titik limit dan himpunan tertutup dalam ruang metrk-G yang dikenal dengan titik limit-G dan himpunan tertutup-G.

Definisi 2.3 Titik Limit-G

Diberikan ruang metrik-$G(X,G)$ dan A himpunan bagian dari X. Titik $x \in X$ adalah titik limit-G dari A jika untuk setiap $r > 0$, bola-G $B_G(x,r)$ memuat titik $y \in A$ selain x.

Himpunan titik limit-G dari A biasa dinotasikan dengan $\boldsymbol{A'}$-$\boldsymbol{G}$. Suatu himpunan missal $\boldsymbol{A}$ dikatakan tertutup-G jika dan hanya jika $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$-$\boldsymbol{G}](\boldsymbol{A})$. Dimana $\boldsymbol{C}$-$\boldsymbol{G}](\boldsymbol{A})$ merupakan penutup himpunan A yang didefinisikan dengan $\boldsymbol{C}$-$\boldsymbol{G}](\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A'}$-$\boldsymbol{G}$.

Setelah mengenal titik limit-G dan himpunan tertutup-G selanjutnya diberikan definisi barisan konvergen-G sebagai berikut.

Definisi 2.4 Barisan konvergen-G

Diberikan ruang metrik-G (X,G) dan barisan (x_n) yang merupakan barisan pada X. Barisan (x_n) dikatakan konvergen-G ke x jika $\lim\big(G(x,x_n,x_m)\big) = 0$ atau untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $G(x,x_n,x_m) < \varepsilon$ untuk setiap $n,m \geq n_0$.

Selanjutnya diberikan kriteria kekonvergenan barisan pada ruang metrik-G sebagai berikut.

Teorema 2.2 Diberikan (X,G) ruang metrik-G maka pernyataan berikut ekuivalen

1. Barisan (x_n) konvergen-G ke x.
2. $\lim(G(x_n,x_n,x)) = 0$.
3. $\lim(G(x_n,x,x)) = 0$.

Setelah diberikan ulasan tentang kriteria barisan konvergen-G, selanjutnya dikenalkan salah satu jenis barisan khusus dalam ruang metrik-G yaitu barisan Cauchy-G. Adapun definisi dari barisan Cauchy-G adalah sebagai berikut.

Definisi 2.5 Barisan Cauchy-G

Diketahui (X,G) merupakan ruang metrik G, barisan $(X_n) \subseteq X$ dikatakan Cauchy-G jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $G(x_n, x_m, x_\ell) < \varepsilon$, untuk setiap $n, m, \ell \geq n_0$. Dengan kata lain $\lim\big(G(x_n, x_m, x_\ell)\big) = 0$.

Dengan mengambil $\ell = m$ maka berlaku teorema berikut.

Teorema 2.3 Barisan (x_n) adalah Cauchy-G jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ sebarang terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$ untuk setiap $n, m > n_0$.

Selanjutnya pada ruang metrik-G terdapat relasi antara barisan konvergen-G dengan Cauchy-G dan juga kriteria kekonvergenan barisan Cauchy-G sebagai berikut.

Teorema 2.4 Jika barisan $(x_n) \subseteq X$ diruang metrik-G adalah konvergen-G maka barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy-G.

Teorema 2.5 Jika barisan Cauchy-G dalam ruang metrik-G (X,G) memuat barisan bagian yang konvergen-G, maka barisan itu sendiri konvergen-G.

Barisan Cauchy-G memiliki peranan sangat penting. Ruang metrik-G dikatakan lengkap-G juga didefinisikan dengan barisan ini. Definisi formal ruang metrik lengkap-G adalah sebagai berikut.

Definisi 2.6 Ruang metrik lengkap-G
Diketahui (X,G) ruang metrik-G, ruang metrik (X,G) dikatakan lengkap-G jika setiap barisan Cauchy-G pada (X,G) merupakan barisan konvergen-G pada (X,G).

Setelah sifat barisan dalam ruang metrik-G, berikut diberikan definisi terkait pemetaan dalam ruang metrik-G. Diawali dari definisi pemetaan kontinu-G sebagai berikut.

Definisi 2.7. Pemetaan kontinu-G
Diberikan ruang metrik-G, (X,G) dan (X', G'), $f: (X,G) \to (X', G')$. Pemetaan f dikatakan pemetaan kontinu-G di $a \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk $x, y \in X$
$G(a, x, y) < \delta \to G'\big(f(a), f(x), f(y)\big) < \varepsilon$.

Lebih lanjut diberikan definisi pemetaan kontraktif sebagai berikut.

Definisi 2.8 Pemetaan Kontraktif-G
Diberikan (X,G) sebuah ruang metrik-G dan $f:(X,G)\rightarrow(X',G')$ adalah pemetaan. Pemetaan f dikatakan kontraktif-G jika terdapat konstanta c, dimana $0\le c<1$ sehingga $G\big(f(x),f(y),f(z)\big)\le c.G(x,y,z)$.

Hubungan antara pemetaan kontraktif-G dan kontinu-G adalah sebagai berikut.

Teorema 2.6 Suatu pemetaan kontraktif-G adalah kontinu-G.

Lebih lanjut dengan syarat sebuah pemetaan kontinu-G dan barisan pada domain pemetaan konvergen-G mempunyai hubungan biimplikasi dengan kekonvergenan barisan pemetaannya sebagaimana dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.7 Misal (X,G) dan (X',G') adalah ruang metrik-G. Pemetaan $f:(X,G)\rightarrow(X',G')$ kontinu-G di $x\in X$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) adalah konvergen-G ke x maka $\big(f(x_n)\big)$ adalah konvergen-G ke $f(x)$.
Ada suatu pemetaan yang dijamin kontinu-G, yaitu pemetaan yang didefinisikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.8 Misal (X,G) adalah ruang metrik-G dan $A\subseteq X$ maka pemetaan $f:X\rightarrow\mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x)=G(x,x,A)=\inf\{G(x,x,a):a\in A\}$ adalah kontinu-G.

Teorema 2.8 ini mengakibatkan fakta berikut.

Akibat 2.1 Misal (X,G) ruang metrik-G dan $A\subseteq X$. Himpunan $A=\{x\in X:G(x,x,A)=0\}$ jika dan hanya jika A merupakan himpunan bagian tertutup-G pada ruang metrik-G (X,G).

Lebih lanjut teorema 2.8 ini dapat dimanfaatkan untuk membuktikan adanya fungsi kontinu-G khusus sebagai berikut.

Teorema 2.9 Jika A dan B merupakan himpunan bagian tertutup-G yang saling asing dari ruang metrik-G (X,G), maka terdapat pemetaan kontinu-G

Jurnal Euclid, p-ISSN 2355-1712, e-ISSN 2541-4453, Vol. 6, No. 1, pp. 1- 116

bernilai real pada X sehingga $f(x) = 0$ dan $f(y) = 1$ untuk setiap $x \in A$ dan $y \in B$.

Sebagaimana pemetaan dalam bilangan real keberadaan delta yang bergantung pada epsilon dan berlaku untuk setiap titik $c \in \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai pemetaan kontinu seragam. Konsep ini juga berlaku pada ruang metrik-G sehingga didefinisi pemetaan kontinu seragam dalam ruang metrik-G sebagai berikut.

Definisi 2.9 Kontinu Seragam-G
Diberikan ruang metrik-$G(X,G)$ dan (X',G'). Pemetaan$f:(X,G) \to (X'.G')$ disebut kontinu seragam-G jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $G(x,y,z) < \delta \to G'\big(f(x),f(y),f(z)\big) < \varepsilon$.

Himpunan pemetaan kontinu seragam-G dari (X,G) ke (X',G') dinotasikan sebagai $\boldsymbol{U(X,X')-G}$. Selanjutnya juga terdapat pemetaan kontinu-G yang selalu mempertahankan sebuah barisan Cauchy-G dari domain ke kodomain pemetaan tersebut. Pemetaan ini disebut sebagai pemetaan kontinu Cauchy-G yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.10 Pemetaan Kontinu Cauchy-G
Diberikan ruang metrik-G (X,G) dan (X',G'). Pemetaan $f:(X,G) \to (X',G')$ disebut kontinu Cauchy-G jika f menjaga barisan Cauchy-G agar untuk setiap barisan Cauchy-G di X juga Cauchy-G di X'.

Pemetaan kontinu Cauchy-G dari (X,G) ke (X',G') dinotasikan dengan $F(X,X')$-G. Hubungan antara pemetaan kontinu seragam-G dan kontinu Cauchy-G adalah sebagai berikut.

Teorema 2.10. Misalkan (X,G) dan (X',G') merupakan ruang metrik-G. Pemetaan $f:(X,G) \to (X',G')$ yang kontinu seragam-G merupakan pemetaan kontinu Cauchy-G.

Bukti:
Diambil $\varepsilon > 0$ sebarang dan barisan Cauchy-G sebarang misal (x_n) di X, sehingga untuk setiap $\delta > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $G(x_n,x_m,x_\ell) < \delta$ untuk $n,m,\ell \geq n_0$.

Karena f kontinu seragam-G maka $G'(f(x_n),f(x_m),f(x_\ell)) < \varepsilon$ sehingga dapat ditemukan n_0 yang memenuhi $n,m,\ell \geq n_0$ dengan $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $(f(x_n))$ merupakan barisan Cauchy-G. ■

Selanjutnya dijelaskan hubungan hubungan pemetaan kontinu Cauchy-G dengan pemetaan kontinu-G adalah sebagai berikut.

Teorema 2.11 Setiap pemetaan kontinu Cauchy-G merupakan pemetaan kontinu-G.

Bukti:
Andai $f: X \to X'$ pemetaan kontinu Cauchy-G tetapi bukan kontinu-G. Untuk asumsi f tidak kontinu dapat digunakan negasi teorema 2.7 untuk ini yaitu terdapat (x_n) konvergen ke x_0 maka $(f(x_n))$ tidak kovergen ke $f(x_0)$.
Perhatikan bahwa ada barisan $y_n = (x_1, x_0, x_2, x_0, \dots x_n, x_0, \dots)$ konvergen ke x_0 sehingga (y_n) adalah Cauchy-G. Berdasarkan asumsi diawal barisan $y_n = (x_1, x_0, x_2, x_0, \dots x_n, x_0, \dots)$ ini berlaku $G'(f(x_{2n}), f(x_{2n-1}), f(x_{2n-1})) \geq \varepsilon$. (*). Padahal f adalah pemetaan kontinu Cauchy-G, haruslah $(f(y_n))$ merupakan barisan Cauchy-G. Yang mana berlaku $G'(f(x_{2n}, x_{2n-1}, x_{2n-1}) < \varepsilon$. (**). Sehingga asumsi diawal salah, haruslah setiap pemetaan kontinu Cauchy-G adalah kontinu-G.
Berdasar hasil yang diperoleh teorema 2.5, 2.6, dan 2,7 diperoleh akibat teorema sebagai berikut.

Akibat 2.2 Untuk setiap ruang metrik-G $(X,G),(X',G')$ berlaku hubungan
$U(X,X') - G \subseteq F(X,X') - G \subseteq C(X,X') - G$.
Akibat 2.3 Diberikan ruang metrik-G lengkap maka berlaku
$F(X,X') - G = C(X,X') - G$
Pembahasan selanjutnya adalah himpunan terbatas total dan beberapa sifat didalamnya. Pembahasan ini diawali dengan pengenalan definisi Jaring-ε sebagai berikut.

Definisi 2.12 Jaring- ε
Misal (X,G) merupakan ruang metrik-G dan diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Himpunan $A \subseteq X$ dikatakan jaring-ε dari (X,G) jika setiap $x \in X$ selalu terdapat titik $a \in A$ sehingga $x \in B_G(a,\varepsilon)$.

Jika himpunan A adalah himpunan berhingga maka A disebut jaring-ε berhingga dari (X, G). Perlu diperhatikan misal A adalah jaring-ε dari (X, G) maka $X \subseteq \bigcup_{a \in A} B_G(a, \varepsilon)$.

Dari pengertian jaring-ε ini selanjutnya didefinisikan himpunan bagian terbatas total sebagai berikut.

Definisi 2.13 Himpunan bagian terbatas total-G
Suatu himpunan B dalam ruang metrik-G (X, G), dikatakan himpunan bagian terbatas total-G dari X jika setiap $\varepsilon > 0$ terdapat jaring-ε berhingga untuk B.

Selanjutnya diberikan syarat suatu himpunan merupakan himpunan terbatas total melalui barisan bagian Cauchy-G sebagai berikut.

Teorema 2.12 Misalkan (X, G) merupakan ruang metrik-G dan $B \subseteq X$. Himpunan B adalah terbatas total-G jika dan hanya jika setiap barisan di B mempunyai barisan bagian Cauchy-G.

Selanjutnya diperkenalkan himpunan diskrit-G, diskrit seragam-G dan diskrit Cauchy-G sebagai berikut.

Definisi 2.14 Himpunan Diskrit-G
Himpunan bagian B dalam ruang metrik-G (X, G) adalah diskrit-G jika untuk setiap $x \in B$ terdapat $\delta > 0$ bergantung pada x sehingga $G(x, y, y) > \delta$ untuk setiap $y \in B \backslash \{x\}$.

Definisi 2.15 Diskrit Seragam-G
Himpunan bagian B dalam ruang metrik-G (X, G) adalah diskrit seragam-G jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $G(x, y, y) > \delta$ untuk setiap $x, y \in B$ dengan $x \neq y$.

Definisi 2.16 Diskrit Cauchy-G
Himpunan bagian B dalam ruang metrik-G (X, G) adalah diskrit Cauchy-G jika setiap himpunan bagian terbatas total-G dari B berhingga.

Antara diskrit seragam-G, diskrit Cauchy-G, dan diskrit-G memiliki hubungan implikatif sebagai berikut.

Jurnal Euclid, p-ISSN 2355-1712, e-ISSN 2541-4453, Vol. 6, No. 1, pp. 1- 116

Teorema 2.13 Dalam ruang metrik-$G(X,G)$ jika B adalah diskrit seragam-G maka diskrit Cauchy- G, dan jika diskrit Cauchy- G maka Diskrit-G.

Bukti:

Misalkan B adalah himpunan diskrit seragam-G dan misalkan A sebarang himpunan terbatas total-G yang termuat di dalam B. Maka berlaku $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_G(x_i, \delta)$ untuk $x_i \in A$ diperoleh A merupakan himpunan bagian berhingga. Disimpulkan setiap himpunan terbatas total dari-G adalah berhingga, artinya B adalah Diskrit Cauchy- G.

Selanjutnya dibuktikan B adalah Diskrit- Cauchy-G maka Diskrit-G.
Andaikan B adalah Diskrit- GF dan B bukan diskrit-G maka terdapat titik $x \in B$ dan sembarang barisan $(y_n : n \in \mathbb{N})$ pada B berlaku $G(x, y_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ dengan kata lain (y_n) konvergen-G ke x, sehingga B adalah terbatas total. Tetapi barisan $(y_n, n \in \mathbb{N})$ pada B memuat tak berhingga banyak anggota, dengan kata lain B bukan Diskrit- GF maka pengandaian salah haruslah B adalah diskrit-G.

Sebagai penutup dari pembahasan ini diberikan hubungan antara kontinu Cauchy-G dan diskrit Cauchy-G yang dapat dilihat pada equivalensi dalam teorema berikut.

Teorema 2.14 Diberikan (X,G) yang merupakan ruang metrik-G maka pernyataan dibawah ini adalah equivalen:

1. Ruang metrik-G (X,G) merupakan ruang metrik lengkap-G.
2. Jika A dan B merupakan himpunan bagian salinga asing dari X. Maka terdapat pemetaan kontinu Cauchy-G bernilai Real pada X sehinga $f(x) = 0$ dan $f(y) = 1$ untuk setiap $x \in A$ dan $y \in B$ berturut turut.
3. Jika D adalah himpunan bagian tertutup diskrit-G dari X maka D merupakan GF-Diskrit.

Bukti:

$(1 \rightarrow 2)$ Berdasar teorema 2.9 maka terdapat pemetaan kontinu-G bernilai real pada X sehingga $f(x) = 0$ dan $f(y) = 1$ untuk setiap $x \in A$ dan $y \in B$. Berdasar akibat 3.3 berlaku setiap pemetaan kontinu-G adalah pemetaan kontinu Cauchy-G.

$(2 \rightarrow 3)$ Misalkan D himpunan bagian diskrit-G dan tertutup-G dari X

dan andaikan D tidak Diskrit-GF maka terdapat himpunan bagian terbatas total-G dari X yang tak berhingga. Sehingga terdapat (x_n) barisan Cauchy-G yang tak berhingga pada D. Dengan mengambil himpunan A suku ganjil barisan (x_n) dan B yaitu suku genap barisan (x_n) merupakan himpunan saling asing dan tertutup-G, maka terdapat pemetaan kontinu-G yaitu $f: X \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x) = 0$ dan $f(y) = 1$ dimana $x \in A, y \in B$ maka terbentuk barisan $(0,1,0,1,0,1, \dots)$ bukan barisan Cauchy sehingga f haruslah bukan pemetaan kontinu Cauchy maka pengandaian salah haruslah D Cauchy diskrit-G.

$(3 \to 1)$ Himpunan D adalah himpunan bagian tertutup-G diskrit-G dari X maka D merupakan Diskrit-GF. Andaikan (X, G) merupakan ruang metrik tak lengkap-G sehingga terdapat barisan Cauchy-G misal (x_n) yang tidak konvergen-G sehingga semua barisan bagian (x_n) juga tidak akan konvergen. Misalkan himpunan $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ maka D diskrit dan tertutup-G. Selanjutnya berdasar **Teorema 3.12** maka D tertutup total-G tetapi D memuat barisan bagian tak berhingga sehingga bukan Diskrit-GF Pengandaian salah haruslah (X, G) merupakan ruang metrik lengkap-G.

3. Simpulan dan Saran

Berdasarkan penelitian tentang pemetaan dalam ruang metrik-G ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut (1) Setiap pemetaan yang kontinu seragam-G merupakan pemetaan kontinu Cauchy-G dan pemetaan yang kontinu Cauchy-G adalah pemetaan kontinu-G. (2) Setiap himpunan diskrit seragam-G merupakan diskrit Cauchy-G dan setiap himpunan diskrit Cauchy-G adalah diskrit-G. (3) Hubungan antara pemetaan kontinu Cauchy-G dan himpunan diskrit-G pada ruang metrik-G dapat dilihat dari ekuivalensi pernyataan berikut: Ruang metrik-G (X, G) merupakan ruang metrik lengkap-G ekuivalen dengan pernyataan jika A dan B merupakan himpunan bagian saling asing dari X, maka terdapat pemetaan kontinu

Cauchy-G bernilai Real pada X sehinga $f(x) = 0$ dan $f(y) = 1$ untuk setiap $x \in A$ dan $y \in B$, serata ekuivalen dengan pernyataan jika D adalah himpunan bagian tertutup diskrit-G dari X maka D merupakan Diskrit Cauchy-G.

Untuk memperlengkap pembahasan tentang ruang metrik-G diharapkan ada penelitian lebih lanjut mengenai pemetaan dalam ruang metrik-G maupun tentang deret pemetaan dalam ruang metrik-G.

Daftar Pustaka

Hernadi, J. 2015. *Analisis Real Elementer dengan Ilustrassi Grafis dan Numeris*. Jakarta: ERLANGGA.

Ilkhan, E. & Emrah, E.K. 2017. Uniform Continuity and Cauchy Continuity in G-Metric Spaces. *Jurnal of Inequalities and Special Functions ISSN*: 2217-4303.

Mustafa, Z. & Brailey, S. 2006. A New Aproach to Generalized Metric Spaces. *Jurnal Nonlinear and Convex Analisis, 7(2)*: 289-297.